UN MODÈLE DE GÉOMÉTRIE NON EUCLIDIENNE

Ibrahim Keita

[Ceci est une version allégée]

A mon maître, le professeur Jean Martinet de l'Université Louis Pasteur de Strasbourg.

«Les mathématiques sont la poésie des sciences.» *Léopold Sédar Senghor*

La géométrie euclidienne, à laquelle tout le monde a été initié au collège puis au lycée, repose sur un ensemble de définitions appelées postulats (axiomes en langage moderne). Le plus célèbre des axiomes est celui des parallèles, encore appelé postulat d'Euclide, qui dit :

"Par un point situé hors d'une droite, on ne peut mener à cette droite qu'une parallèle et une seule".

Jusqu'au 18e siècle la communauté mathématique s'est posée la question de savoir si cet axiome pouvait être prouvé à partir des autres. En vain.

I. LE DISQUE DE POINCARE

1. Définition

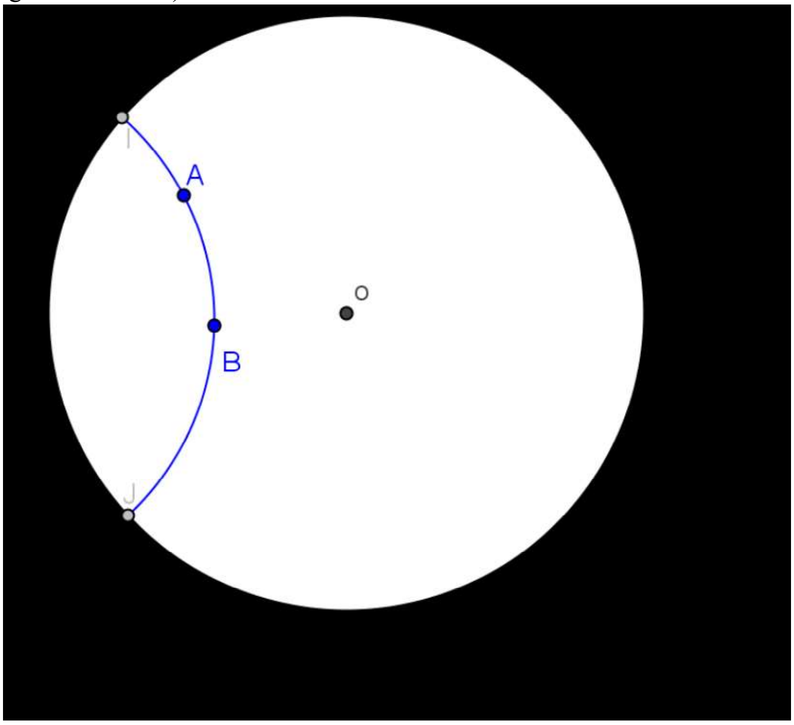
Au début du 19e siècle, Carl Friedrich Gauss a trouvé la réponse: l'axiome des parallèles était indémontrable et on pouvait construire des géométries parfaitement cohérentes en le refusant. Mais Gauss, le prince des mathématiciens ne publia pas ses résultats par peur des critiques et réticences des esprits traditionalistes. Il écrivit à Bessel en 1829:

« J'appréhende les clameurs des béotiens, si je voulais exprimer complètement mes vues ».

Ce sont Nikolaï Lobatchevski en 1829 avec "Géométrie imaginaire" et János Bolyai vers 1830 avec "La science absolue de l'espace" qui ont publié, de façon indépendante, deux modèles de géométrie non euclidienne. Dans l'une on peut mener plusieurs parallèles à une droite donnée (géométrie hyperbolique ou géométrie Lobatchevski); dans l'autre aucune (géométrie elliptique).

A la fin du 19e siècle, Henri Poincaré a étudié et perfectionné un modèle élégant de la géométrie Lobatchevski qu'on a fini par appeler le disque de Poincaré. Nous essaierons ici d'en donner une idée avec différents problèmes dans le triangle: angles, théorème de Pythagore, hauteurs, médiatrices, médianes,...

Le disque de Poincaré est le disque unité $\mathscr{D}$ qui est l'univers entier, et sa frontière c'est-à-dire le cercle unité Γ est la frontière infinie. Les points demeurent des points mais une droite euclidienne devient un arc de cercle que nous appellerons géodésique. Ainsi la géodésique {AB} est l'arc de cercle IABJ, avec I et J sur Γ et les deux cercles sont orthogonaux en I et J (figures suivantes).



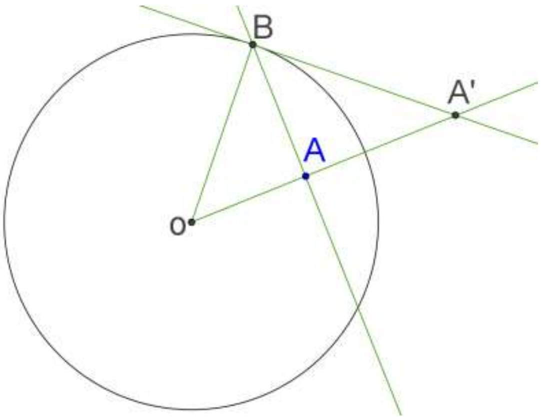
Tout se passe dans $\mathscr{D}$, tout ce qui est extérieur à $\mathscr{D}$ n'existe pas et est là uniquement pour comprendre les constructions géométriques.

Il y a des instruments géométriques comme l'inversion qui vont beaucoup intervenir par la suite. Il convient donc de les rappeler.

2. Préliminaires sur l'inversion et construction de {AB}

a. L'inversion de centre o et de puissance k associe à tout point M différent de o le point M' tel que $\overrightarrow{oM'} = \frac{k}{OM^2}\overrightarrow{oM}$.

Tous les points du cercle de centre o et de rayon $\sqrt{k}$, sont invariants.

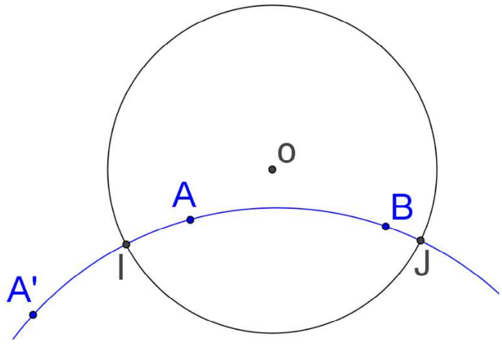


b. L'inversion i de centre o (centre de Γ) et de puissance 1 a pour points invariants tous les points du cercle unité Γ. Son expression complexe est z' = 1/($z\bar{z}$)$. z$; donc:

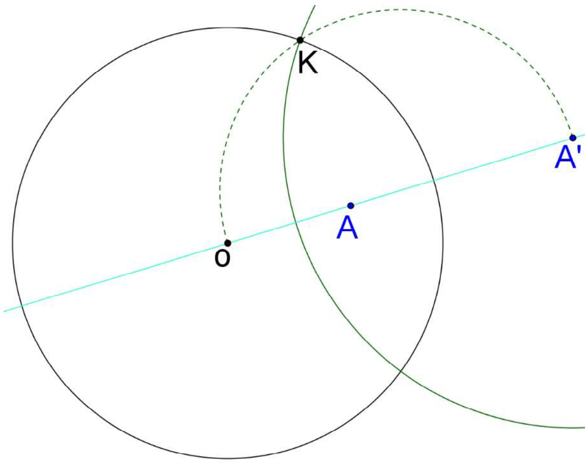
$$i(z) = 1/\bar{z}$$

c. Pour construire l'image A' d'un point A du disque unité par l'inversion i ,
on trace [oA) et sa perpendiculaire en A qui coupe Γ en B. La perpendiculaire en B à (oB) coupe (oA) en A'.

d. Pour construire la géodésique {AB}, on peut remarquer que l'inversion i de points fixes le cercle Γ (unité) laisse invariants les points I et J et conserve l'orthogonalité. Elle laisse donc globalement invariant la géodésique {AB}.
Il suffit alors de construire l'image A' de A par i et ensuite le cercle ABA'.



e. Lemme. Pour tout point A de $\mathscr{D}$, il y a une inversion i_A qui envoie A en o centre de Γ.
(Et même plus, il existe une inversion i_{AB} échangeant A et B quelconques).



p: Si l'inversion i de centre o et de cercle Γ envoie A en A', on a:

$\overline{oA'}\,.\,\overline{oA} = 1$.

Donc: $\overline{oA'}\,.\,(\,\overline{oA'} + \overline{A'A}\,) = 1$

et $\overline{oA'}\,.\,\overline{oA'} - \overline{A'A}.\overline{A'o} = 1$

d'où $\overline{A'A}\,.\,\overline{A'o} = \overline{oA'}^2 - 1$

c'est-à-dire que o est l'image de A par l'inversion i_A de centre A' et de puissance $\overline{oA'}^2 - 1$.

Son expression s'obtient en remarquant:

$$(z' - a').(\bar{z} - \bar{a'}) = a'\bar{a'} - 1$$

Puisque $a' = 1/\bar{a}$, après développement et calcul de z' en fonction de z et a , on obtient:

$$z'\left(\bar{z} - \frac{1}{a}\right) - \frac{1}{\bar{a}}\bar{z} + \frac{1}{a\bar{a}} = \frac{1}{a\bar{a}} - 1$$

$$z'\left(\bar{z} - \frac{1}{a}\right)\bar{z} = \frac{1}{\bar{a}}\bar{z} - 1$$

d'où:

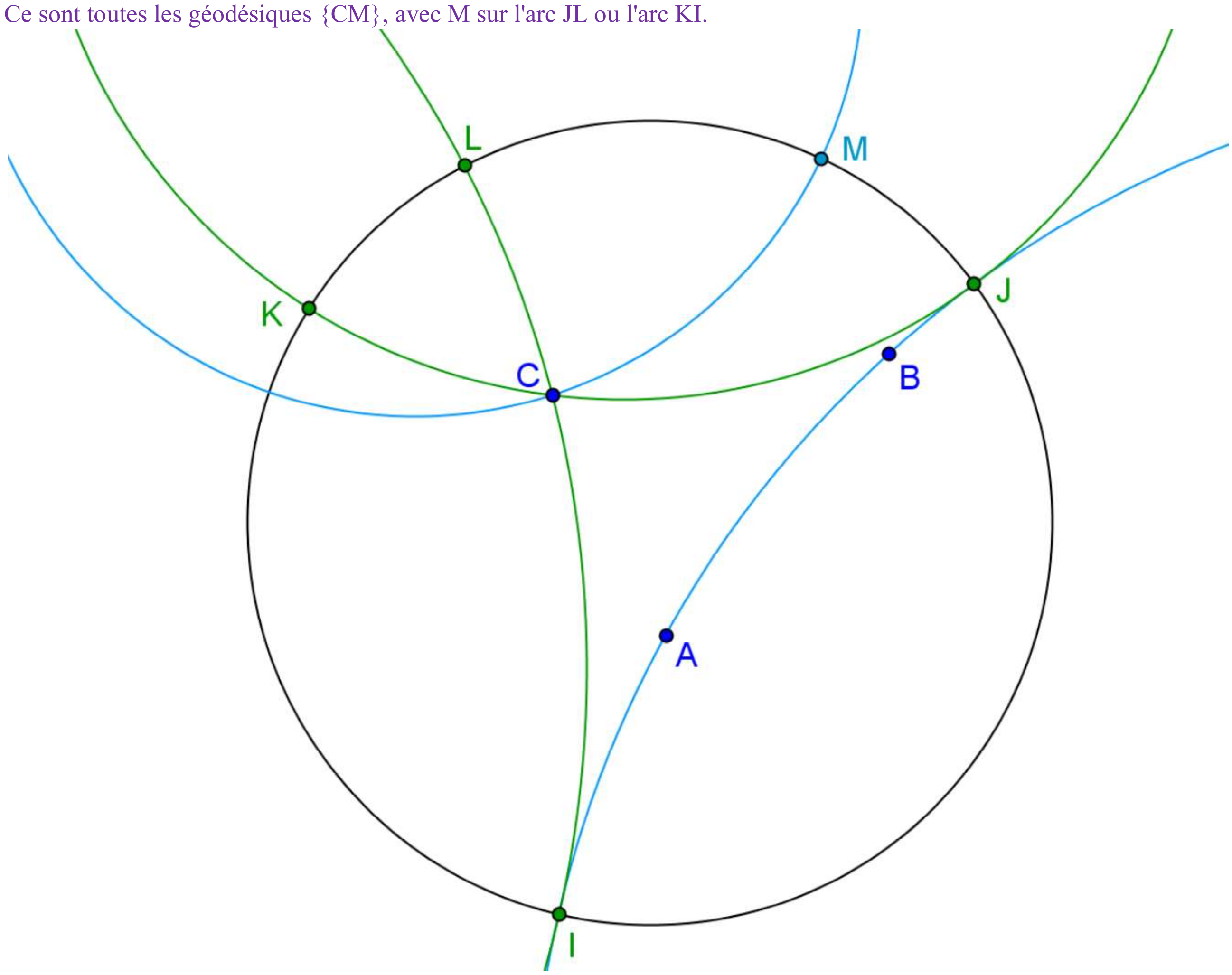
$$\boxed{i_A(z) = \frac{\frac{1}{\bar{a}}\bar{z} - 1}{\bar{z} - \frac{1}{a}}}$$

« Défiez-vous des ensorcellements et des attraits diaboliques de la géométrie. » *Fénelon*

3. Axiome des parallèles

En géométrie hyperbolique, par un point C pris hors d'une géodésique {AB}, il passe une infinité de géodésiques ne rencontrant pas {AB}.

Ce sont toutes les géodésiques {CM}, avec M sur l'arc JL ou l'arc KI.



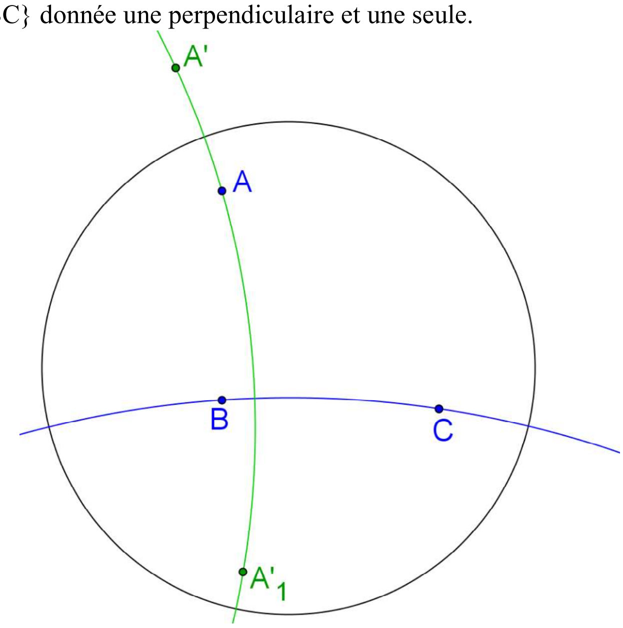
« Par un point extérieur à une droite donnée, il passe deux droites parallèles à cette droite. » *Nicolaï Lobatchevski*

Ce sont les géodésiques {CI} et {CJ} (elles rencontrent {AB} à l'infini).

4. Orthogonalité

Par un point A donné on peut mener à une géodésique {BC} donnée une perpendiculaire et une seule.

La géodésique issue de A et orthogonale à {BC} est globalement invariante par les inversions de cercle fixe Γ et de cercle fixe {BC} et passe donc par les images A' et A'_1 de A par ces inversions.



II. POPRIETES METRIQUES DU TRIANGLE DANS LE DISQUE DE POINCARE

« Les mathématiques, considérées à leur juste mesure, possèdent non seulement la vérité, mais la beauté suprême, une beauté froide et austère, comme celle d'une sculpture, sans référence à une partie de notre fragile nature, sans les effets d'illusion magnifiques de la peinture ou de la musique, pourtant pur et sublime, capable d'une perfection sévère telle que seulement les plus grands arts peuvent la montrer. L'esprit vrai du plaisir, l'exaltation, l'impression d'être plus qu'un homme, qui est la pierre de touche de l'excellence la plus élevée, doit être trouvé dans les mathématiques aussi sûrement que la poésie. » Bertrand Russel

Le triangle {ABC} est défini par ses sommets A, B, C et ses cotés qui sont les géodésiques {AB}, {AC} et {BC}.

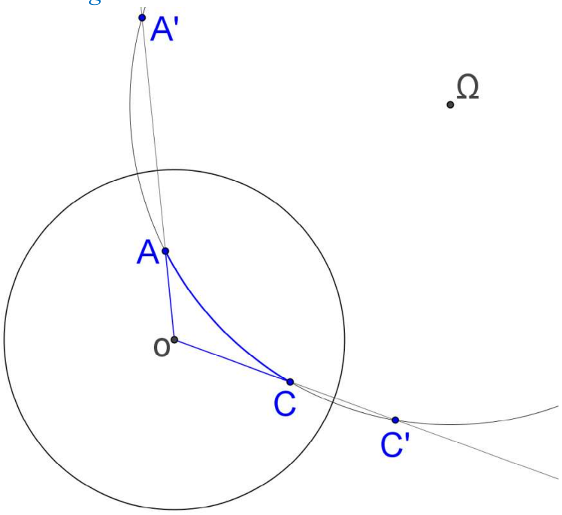
1. Somme des angles

De façon générale, Lobatchevski a montré, à l'aide d'une dichotomie d'angles, que
« Dans tout triangle rectiligne, la somme des trois angles ne peut surpasser deux angles droits. »

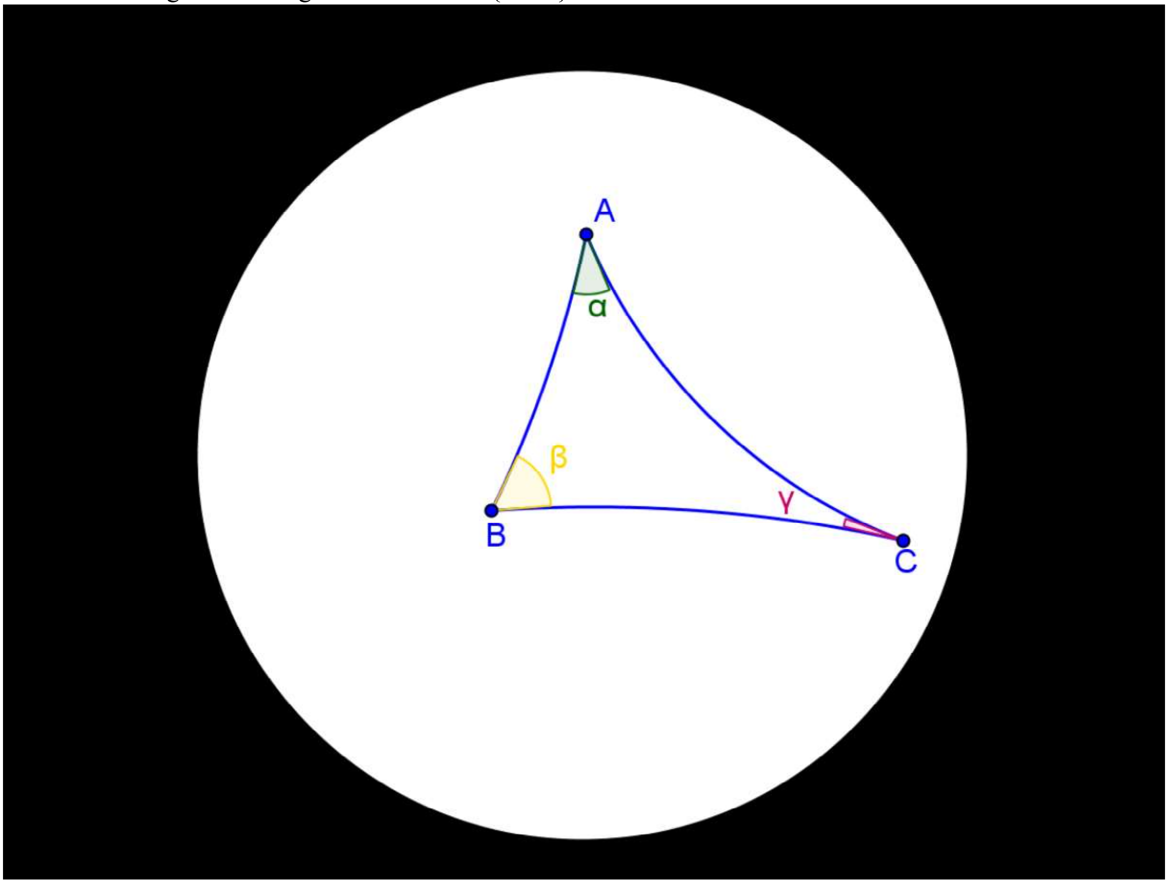
a) p: Voici une preuve élémentaire.
Si {ABC} est un triangle non euclidien dans le disque de Poincaré, l'inversion i_B amenant B en o permet d'avoir la figure ci-contre où B est en o, les géodésiques {oA} et {oC} étant de vraies droites.
Puisque {AC} passe par A' et C' images de A et C par l'inversion i, on a $\overrightarrow{oA}\,.\,\overrightarrow{oA'} = 1 > 0$; donc o est extérieur à {AC}.
Comme $oA' > oA$ et $oC' > oC$, la corde [AC] est intérieure à {AC} ; donc le segment géodésique {AC} est intérieur au triangle euclidien AoC.
Si on appelle α , β , γ les angles en A , B , C du triangle non euclidien {ABC}, on a: $\alpha < \widehat{oAC}$, $\gamma < \widehat{oCA}$ et $\beta = \widehat{AoC}$
d'où $\alpha + \beta + \gamma < \widehat{oAC} + \widehat{AoC} + \widehat{oCA}$.
Comme la somme des angles du triangle euclidien AoC vaut π, on a prouvé que

$\boxed{\alpha + \beta + \gamma < \pi}$

Dans le cas général, on peut affirmer:



b) La somme des angles du triangle non euclidien {ABC} est strictement inférieure à 180°.

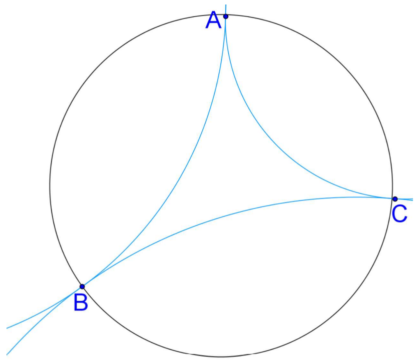


2. Aire d'un triangle non euclidien

a) On appelle triangle idéal un triangle non euclidien dont les trois sommets sont à l'infini. Par un calcul intégral, non immédiatement trivial (voir Annexe) on démontre que l'aire non euclidienne de tout triangle idéal est finie (on va à l'infini, mais les angles aux sommets tendent vers 0 donc les portions d'aire vers les sommets deviennent "négligeables") et vaut π.

Si {ABC} est un triangle idéal, son aire non euclidienne notée $\mathscr{A}_3$(ABC) vaut donc $\mathscr{A}_3(ABC) = \pi$.

On en déduit alors une jolie démonstration de ce qu'on appelle le théorème de Gauss-Bonnet.



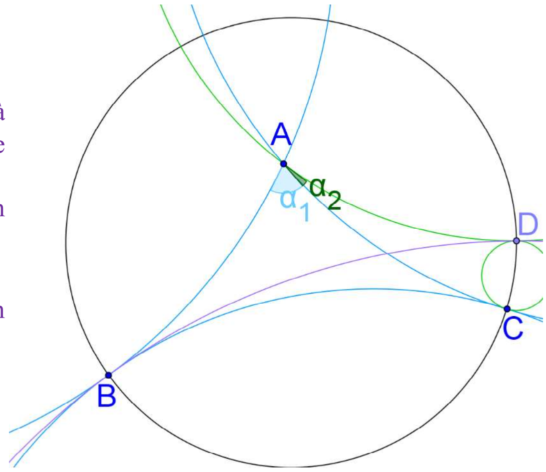
b) Si {ABC} est un triangle semi-idéal en A (A dans $\mathscr{D}$, B et C à l'infini) avec l'angle en A valant α, son aire non euclidienne sera notée $\mathscr{A}_2$(ABC) ou $\mathscr{A}_2(\alpha)$.

Soit un triangle {ABC} semi-idéal en A avec un angle α_1. Pour un point quelconque D à l'infini (extérieur à l'arc intérieur $\widetilde{BC}$), on a:

$\mathscr{A}_2(ABC) + \mathscr{A}_2(ACD) = \mathscr{A}_2(ABD) + \mathscr{A}_3(BCD) = \mathscr{A}_2(ABD) + \pi$ (1)

Autrement dit, si α_1 et α_2 sont les angles en A dans les triangles non euclidiens {ABC} et {ACD}, on a:

$\mathscr{A}_2(\alpha_1) + \mathscr{A}_2(\alpha_2) = \mathscr{A}_2(\alpha_1+\alpha_2) + \pi$ (2)



c) Soit maintenant la fonction f définie par:

$f(\alpha) = \pi - \mathscr{A}_2(\alpha)$

on obtient avec la relation (2) :

$f(\alpha_1 + \alpha_2) = f(\alpha_1) + f(\alpha_2)$ (3).

Mais une fonction f vérifiant la relation (3) est forcément linéaire; c'est-à-dire que

$f(\alpha) = k\,\alpha$ avec k constante réelle.

Comme $f(\pi) = k\,\pi = \pi - \mathscr{A}_2(\pi) = \pi - 0 = \pi$,

on en déduit que $f(\alpha) = \alpha$; donc:

$\mathscr{A}_2(\alpha) = \pi - \alpha$ (4) .

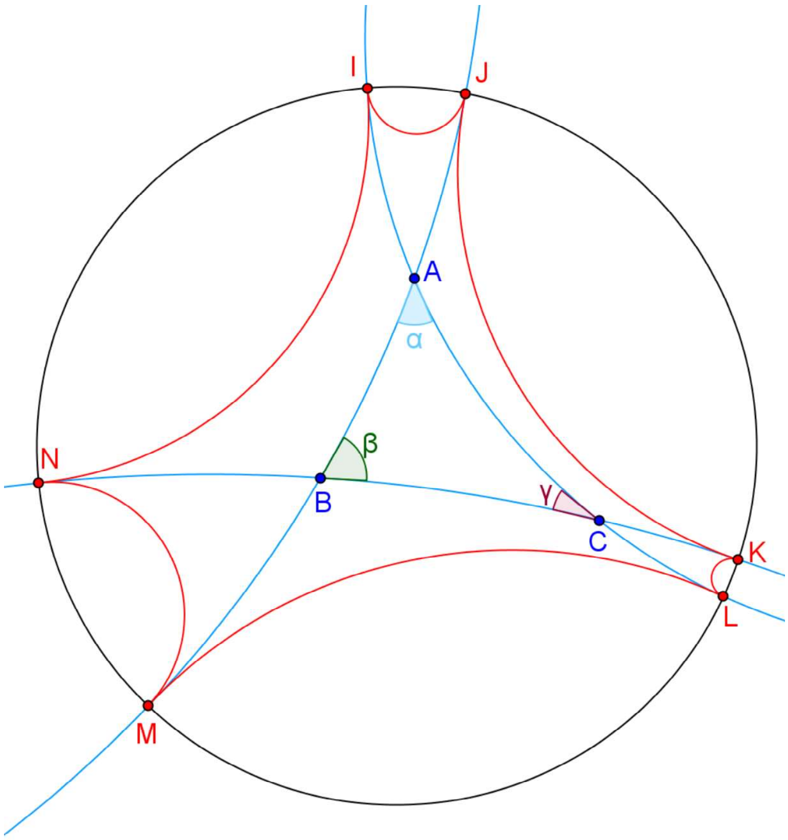
d) Si {ABC} est un vrai triangle de $\mathscr{D}$, en prolongeant ses côtés à l'infini on obtient l'hexagone idéal IJKLMN dont l'aire vaut:

$\mathscr{A}(IJKLMN)=2(\pi-\alpha) + 2(\pi-\beta) + 2(\pi-\gamma) -2\mathscr{A}(ABC)$

D'autre part, on peut calculer l'aire de IJKLMN en le partitionnant en quatre triangles idéaux (à faire); son aire vaut donc:

$\mathscr{A}(IJKLMN) = 4\pi$.

De ces deux expressions de $\mathscr{A}$(IJKLMN), on tire



▪ $\boxed{\mathscr{A}(ABC) = \pi - (\alpha + \beta + \gamma)}$

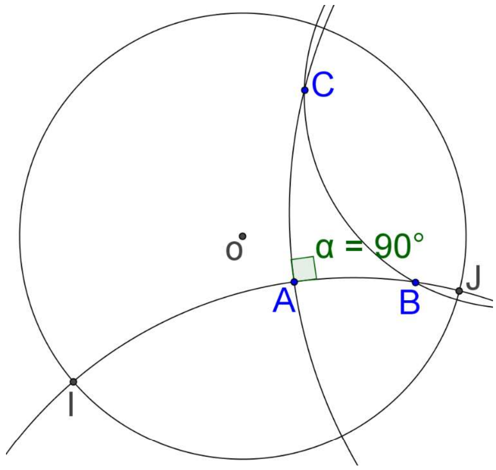
(formule de Gauss)

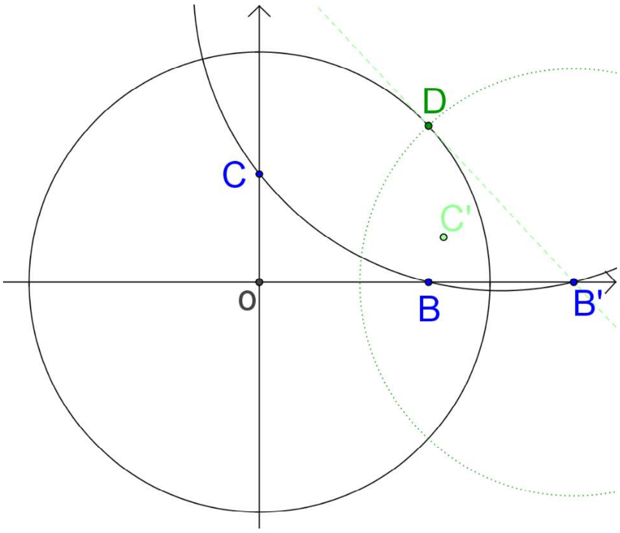
ou bien

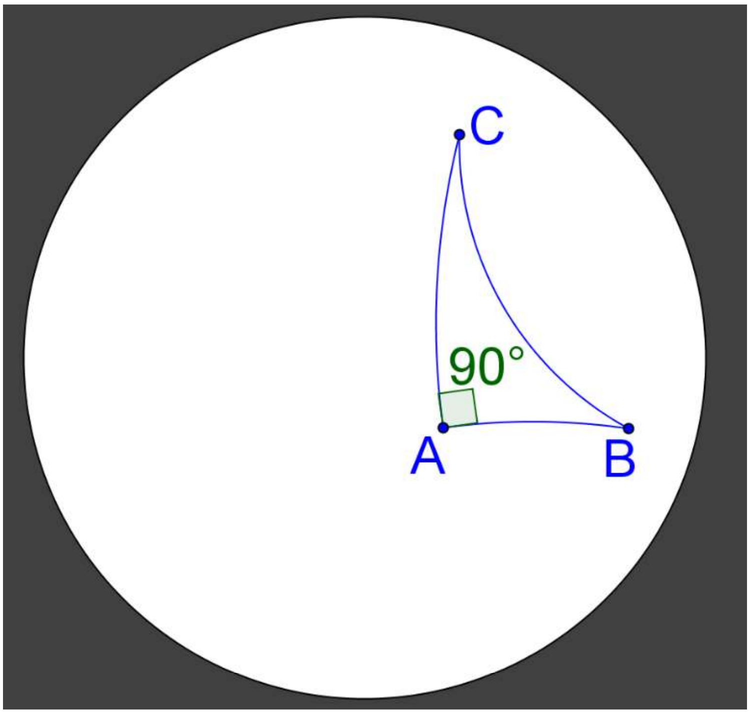
▪ $\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi - \mathscr{A}(ABC)}$

reliant la somme des angles d'un tringle {ABC} non euclidien à son aire.

2. Le théorème de Pythagore







Dans tout triangle {ABC} rectangle en A

$$\boxed{ch(d(A,B)).ch(d(A,C)) = ch(d(B,C))}$$

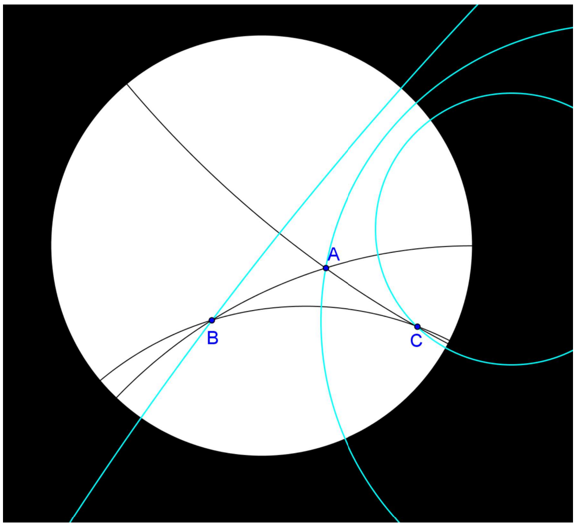
III. POINTS REMARQUABLES DU TRIANGLE DANS LE DISQUE DE POINCARE

«Le mathématicien est un oiselier capturant dans une volière des oiseaux aux brillantes couleurs.»   Platon

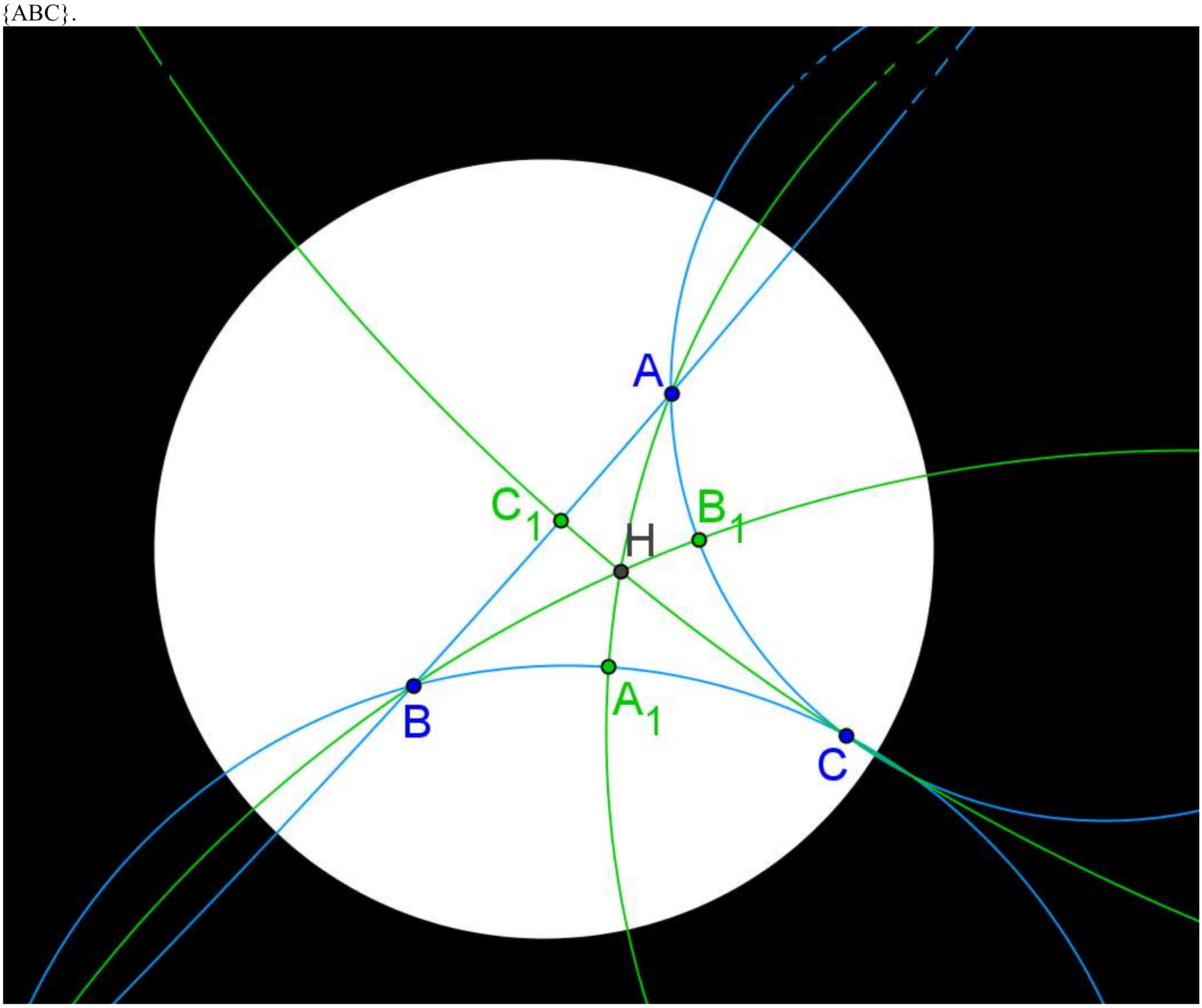
1. Hauteurs

Une hauteur est une géodésique passant par un sommet et orthogonale au coté opposé.

a) Les hauteurs du triangle {ABC} ne sont pas toujours concourantes!



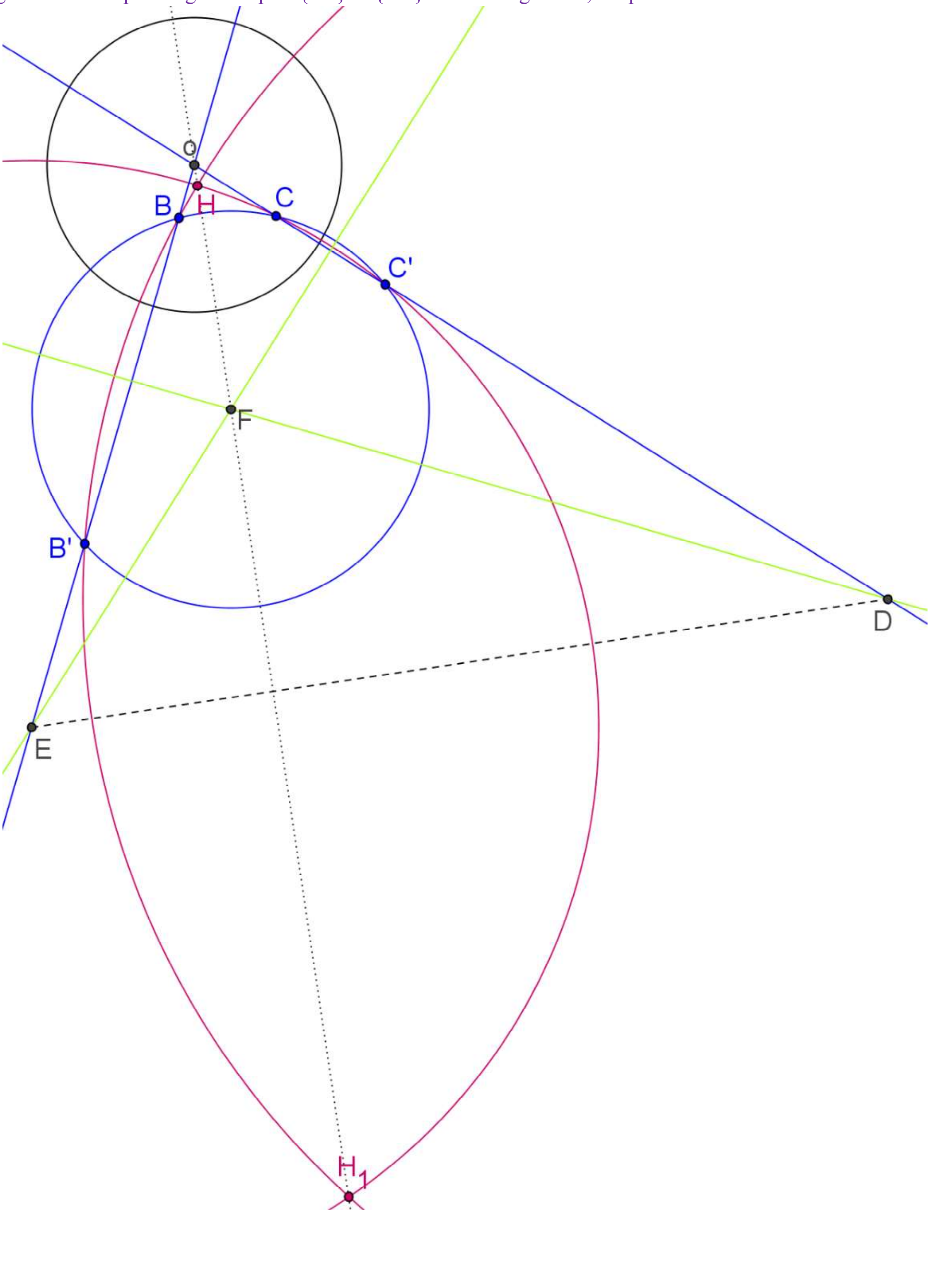
b) Quand deux hauteurs du triangle {ABC} se coupent, la troisième passe par ce même point H appelé orthocentre de {ABC}.



«C’est une erreur de croire que la rigueur dans une démonstration est l’ennemie de la simplicité… L’effort même de la rigueur nous force à découvrir les méthodes de démonstration les plus simples.»   David Hilbert

On envoie A en o par l'inversion i_A .
Quand A est en o centre de $\mathscr{D}$, on a alors la configuration ci-dessous où {oB} et {oC} sont des droites.

o, H et F alignés entraîne que les géodésiques {oH} et {BC} sont orthogonales, ce qui achève la démonstration.

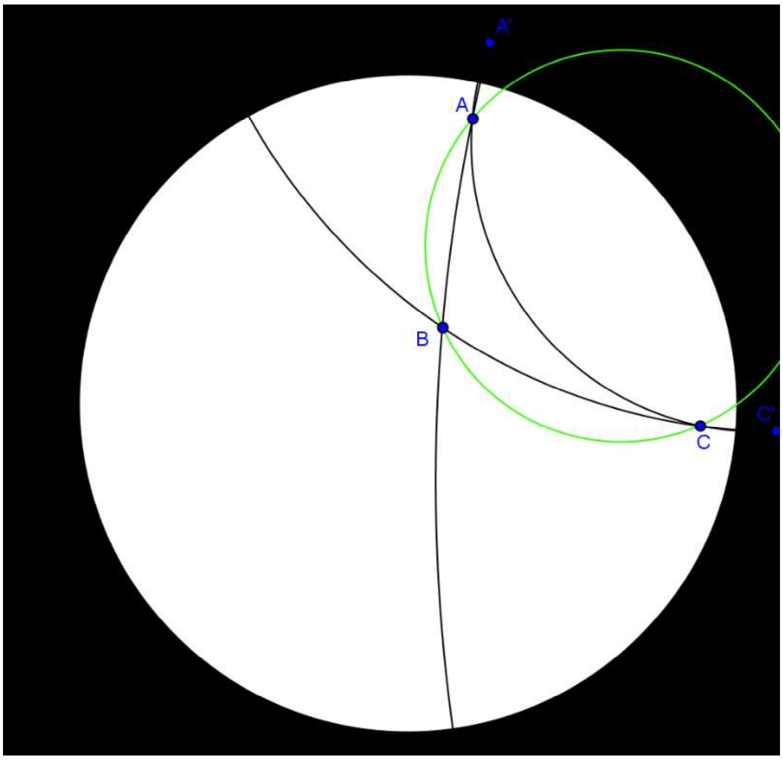


«L'important et le beau de la géométrie c'est, par sa pureté, qu'elle est un instrument de pensée...» Paul Valéry

2. Cercle circonscrit

En métrique non euclidienne, les cercles sont de vrais cercles mais leur centre (n'est pas le centre euclidien) est le point limite du faisceau engendré par un tel cercle et le cercle frontière et appartenant au disque! Le centre non euclidien est le centre euclidien si et seulement si il se trouve en o centre de $\mathscr{D}$.

a) Nous conviendrons que le cercle circonscrit au triangle {ABC} n'existe pas si il n'est pas entièrement contenu dans $\mathscr{D}$, comme ici.



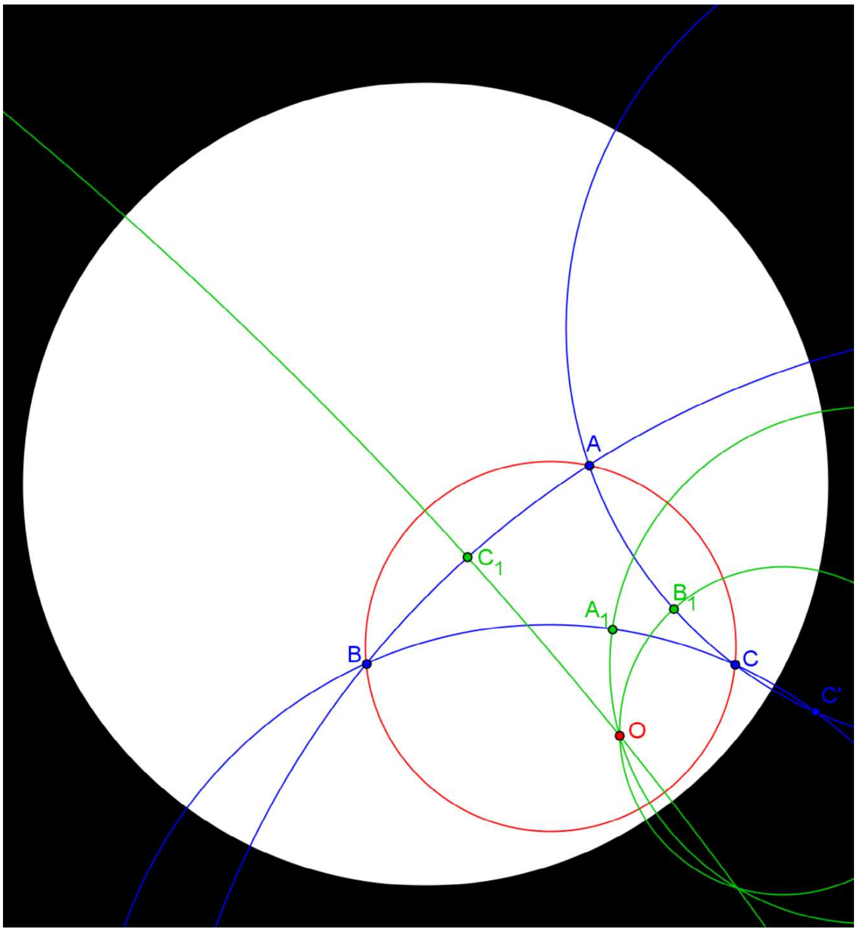
b) Quand le triangle {ABC} a un cercle circonscrit entièrement contenu dans $\mathscr{D}$, le centre non euclidien de ce cercle circonscrit est O le point limite du faisceau(cercle(ABC), Γ) contenu dans $\mathscr{D}$.

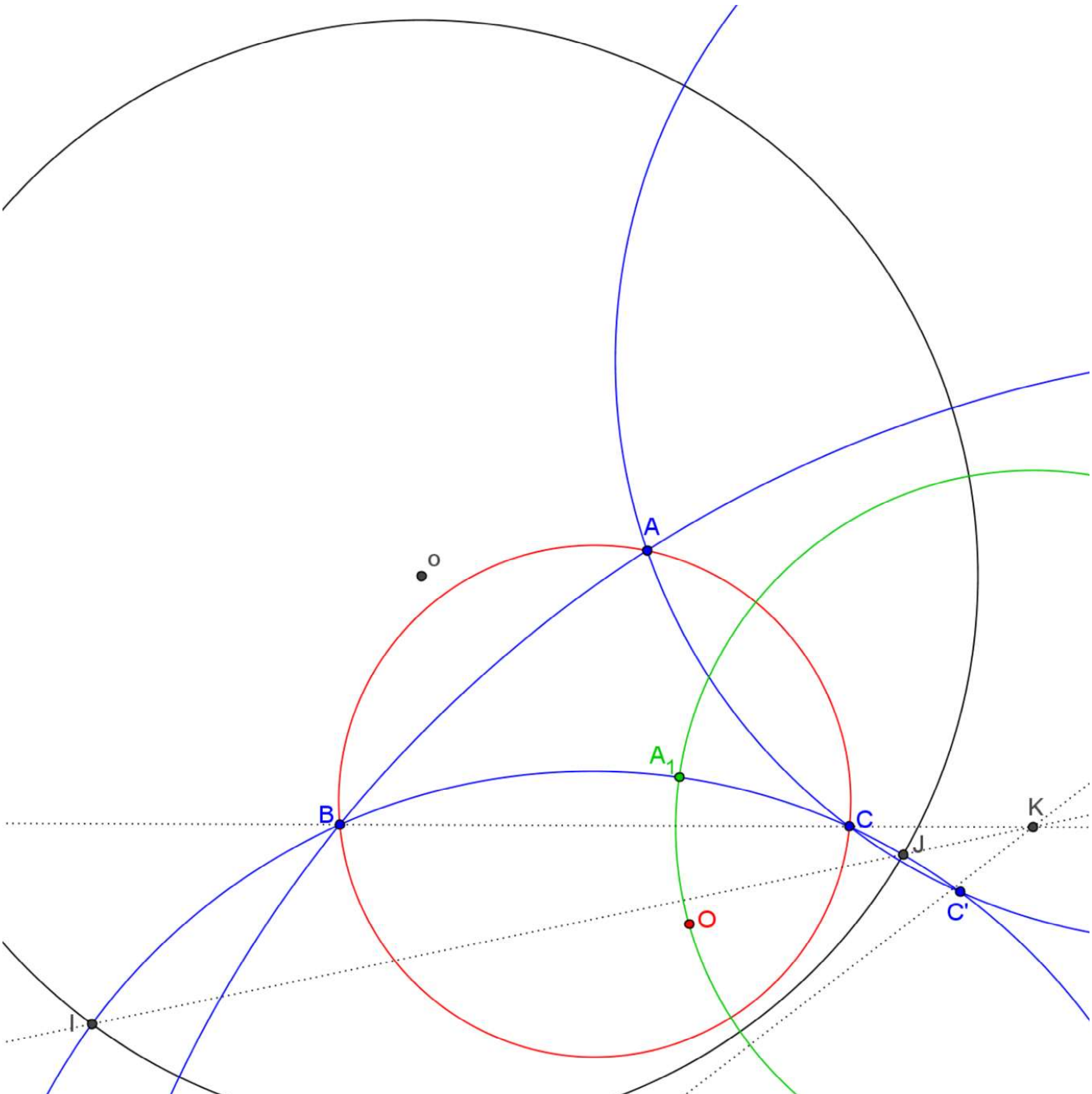
La médiatrice du segment {BC} est la géodésique orthogonale à ce segment en son milieu hyperbolique.

D'après le théorème de Pythagore hyperbolique, la médiatrice est l'ensemble des points équidistants des extrémités d'un segment.

On a la propriété :

Les médiatrices d'un triangle euclidien, si elles existent, sont concourantes en O centre (non euclidien) du cercle circonscrit à ce triangle.



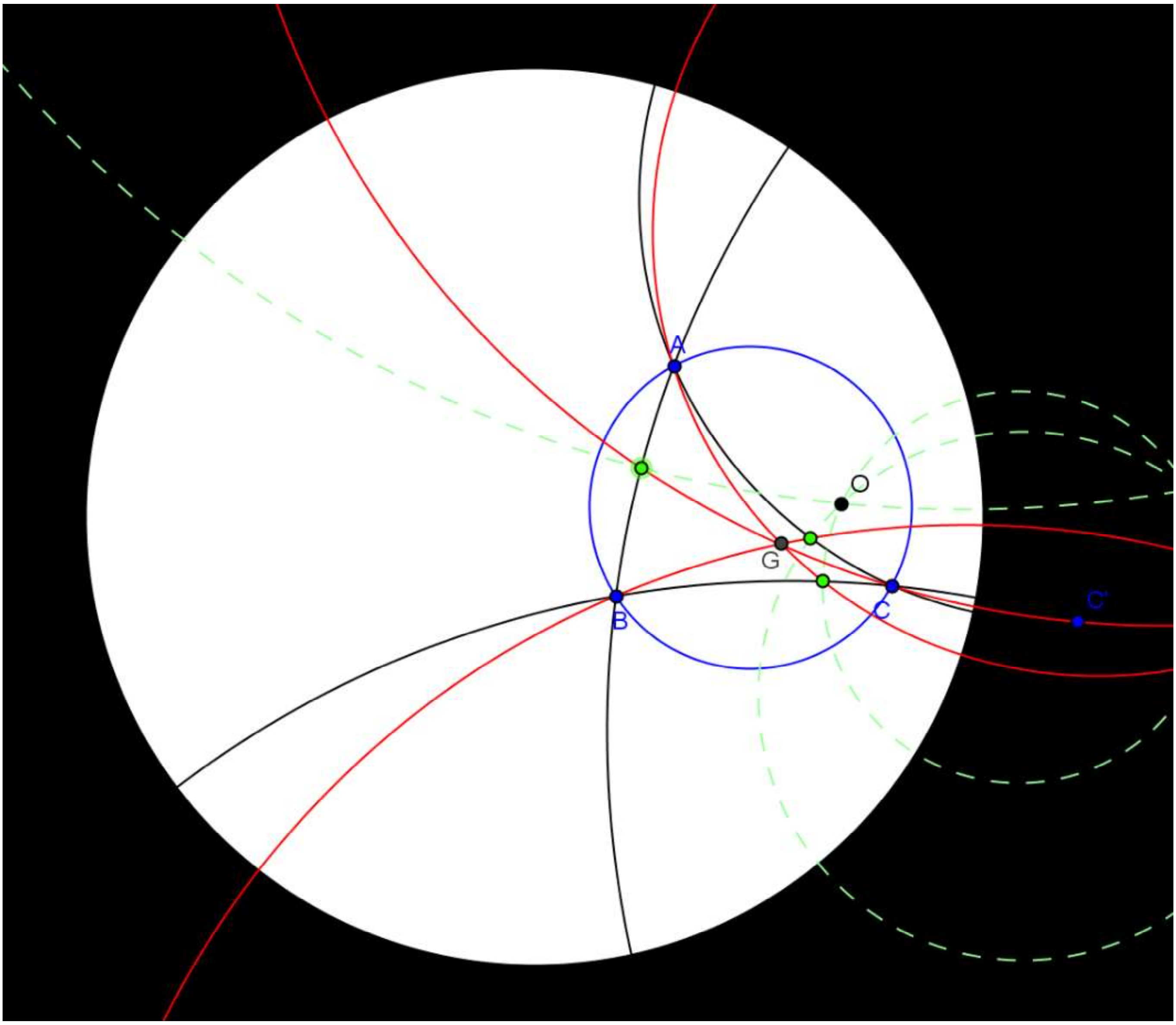

A
o
B
A1
C
K
J
C'
O
I
L

« Si l'esprit d'un homme s'égare, faites-lui étudier les mathématiques car dans les démonstrations, pour peu qu'il s'écarte, il sera obligé de recommencer. »   Francis Bacon

3. Médianes

Quand le triangle {ABC} a un cercle circonscrit dans $\mathscr{D}$, les milieux non euclidiens des cotés existent et on peut définir les médianes: géodésique joignant un sommet au milieu non euclidien du coté opposé.
On a alors:

Les médianes sont concourantes en G centre de gravité non euclidien du triangle {ABC}.

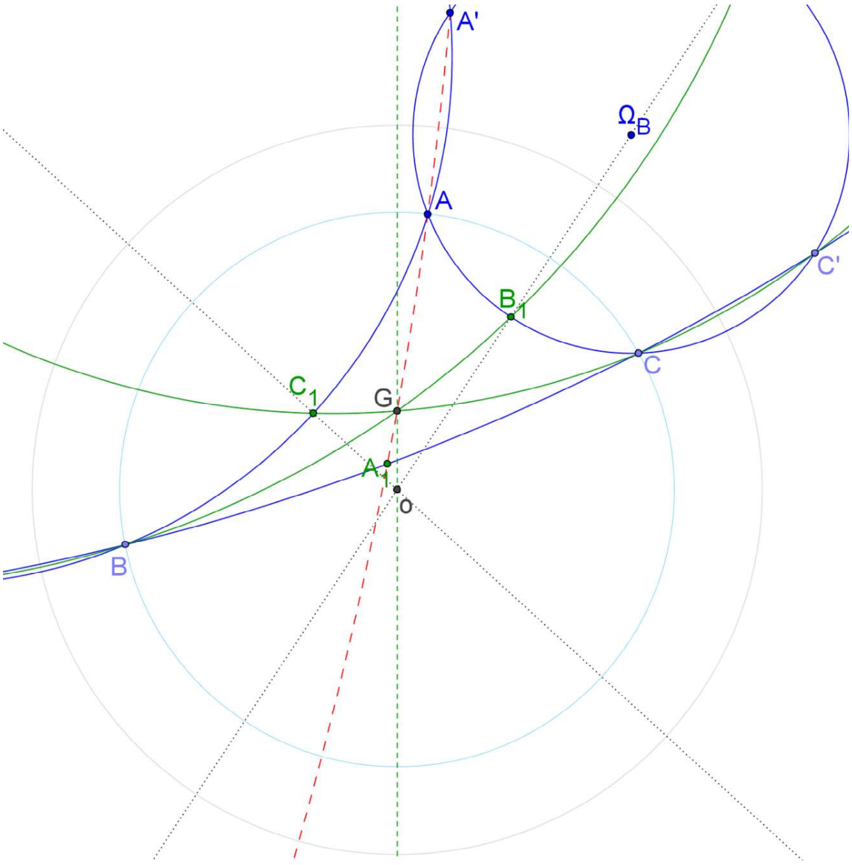


« La probabilité, c'est du bon sens réduit à des calculs.» *Pierre-Simon Laplace*

p:

« Cette marge est trop étroite pour contenir ma merveilleuse preuve. »

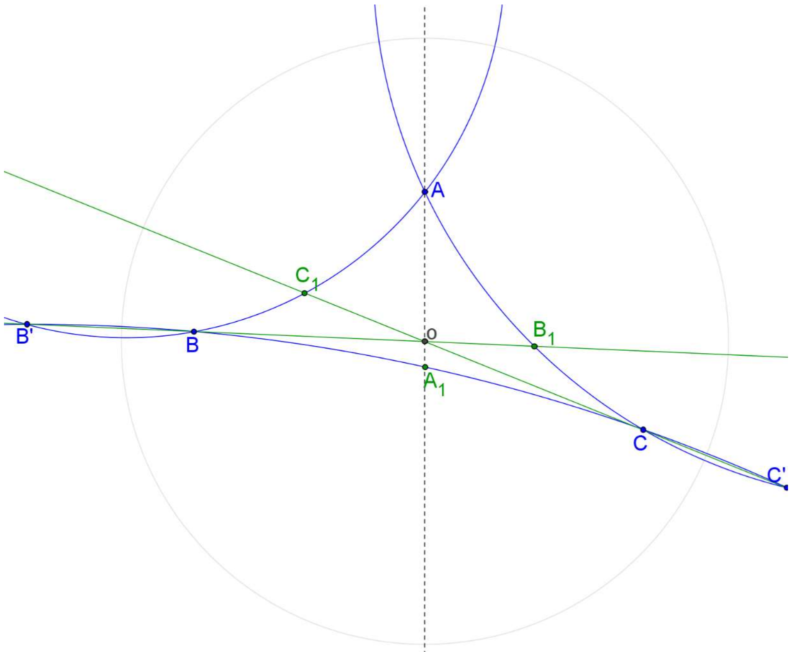
Abraham de Blagat



La démonstration peut, très probablement, se faire en amenant le centre du cercle circonscrit au triangle {ABC} en o. Les milieux des côtés sont alors simplifiés (milieu euclidien de l'arc) et on obtient facilement l'équation de toute médiane.

On a alors la configuration ci-contre où il faut prouver que le point d'intersection G des médianes {BB_1} et {CC_1} appartient aussi à la troisième médiane {AA_1}; ou bien montrer que la géodésique {AG} passe par le milieu A_1 .

Mais j'ai trouvé une autre voie…



« I am a way. Whoever comes in by me will find pasture.»

Annexe . CALCUL DE L'AIRE D'UN TRIANGLE IDEAL

1. Le demi-plan de Poincaré

a) On appelle demi-plan de Poincaré $\mathscr{H}$ le plan complexe limité aux points à ordonnée positive muni d'une métrique non euclidienne et où les droites sont des demi-cercles centrés sur O*x*.

$$\mathscr{H} = \{z \in C \ tel\ que\ \ Im\ z > 0\}$$

Dans ce modèle, les points sur Ox et les points à ordonnée infinie sont à l'infini.

b) L'homographie $f(z) = \frac{iz+i}{-z+1}$ transforme le disque de Poincaré $\mathscr{D}$ en demi-plan de Poincaré $\mathscr{H}$.

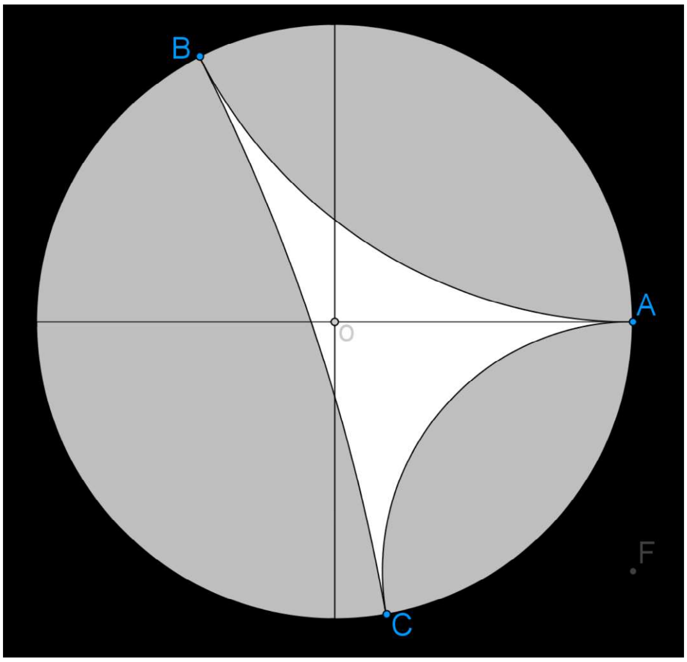
p: f est continue sur $\mathscr{D}$ et $f(0) = i \ \in \mathscr{H}$.

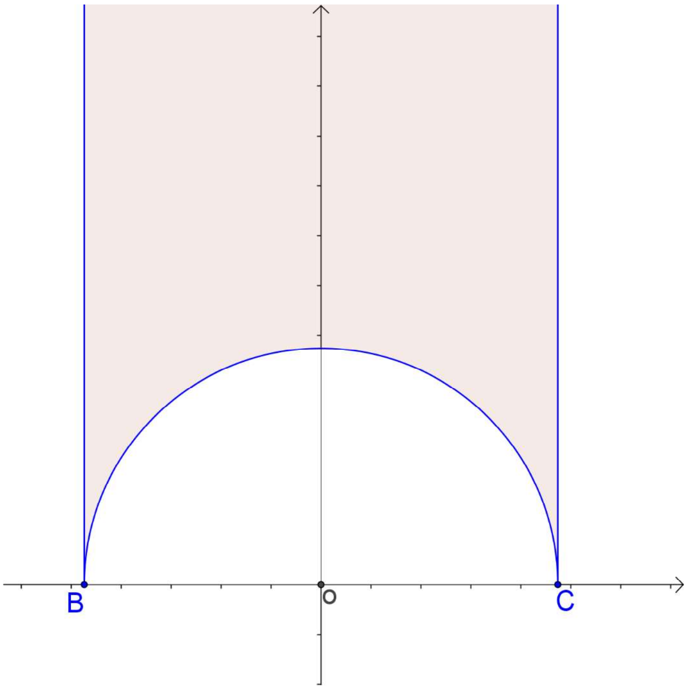
Et si on prend un point $e^{i\theta}$ de la frontière de $\mathscr{D}$, on a

$$f(e^{i\theta}) = i\,\frac{e^{i\theta}+1}{-e^{i\theta}+1} = i\,\frac{e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}}{-e^{i\theta/2}+e^{-i\theta/2}} = i\,\frac{2\cos(\theta/2)}{-2isi\ \ (\theta/2)} = -cotg(\theta/2)$$ appartient à $\mathbb{R}$ frontière de $\mathscr{H}$.

c) Par f , qui conserve la mesure de l'aire, un triangle idéal quelconque (on peut prendre A[1]) du disque de Poincaré $\mathscr{D}$ est transformé en un triangle idéal du demi-plan de Poincaré $\mathscr{H}$.

En prenant l'origine de $\mathscr{H}$ au milieu de [BC], on obtient l'intérieur coloré de ce triangle idéal dans le demi-plan de Poincaré à droite.





d) En remarquant que l'arc (BC) a pour équation $x^2 + y^2 = R^2$ avec $y > 0$

L'aire a du triangle idéal {ABC} se calcule alors:

$$a = \iint \frac{dx\,dy}{y^2} = \int_{-R}^{R} dx \int_{\sqrt{R^2-x^2}}^{+\infty} \frac{dy}{y^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{\sqrt{R^2-x^2}} = \int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = [Arcsin\ t]_{-1}^{1} = \left(\frac{\pi}{2}\right) - \left(-\frac{\pi}{2}\right) = \pi$$

On a donc prouvé que l'aire de tout triangle idéal du disque de Poincaré vaut π.

4. Final

Nous avons maintenant un peu de recul pour parler du disque de Poincaré; ce qui s'y passe, ce qu'il faut en penser de façon générale. Que peut-on globalement en retenir ?

Pour synthétiser, on peut laisser la parole à Poincaré lui-même:

«Si l'espace géométrique était un cadre imposé à chacune de nos représentations, considérée individuellement, il serait impossible de se représenter une image dépouillée de ce cadre, et nous ne pourrions rien changer à notre géométrie.

Mais il n'en est pas ainsi, la géométrie n'est que le résumé des lois suivant lesquelles *se succèdent* ces images. Rien n'empêche alors d'imaginer une série de représentations, de tout point semblables à nos représentations ordinaires, mais se succédant d'après des lois différentes de celles auxquelles nous sommes accoutumés.

...Supposons, par exemple, un monde renfermé dans une grande sphère et soumis aux lois suivantes :

La température n'y est pas uniforme ; elle est maxima au centre, et elle diminue à mesure qu'on s'en éloigne, pour se réduire au zéro absolu quand on atteint la sphère où ce monde est renfermé.

Je précise davantage la loi suivant laquelle varie cette température. Soit R le rayon de la sphère limite ; soit r la distance du point considéré au centre de cette sphère. La température absolue sera proportionnelle à $R^2 - r^2$.

Je supposerai de plus que, dans ce monde, tous les corps aient même coefficient de dilatation, de telle façon que la longueur d'une règle quelconque soit proportionnelle à sa température absolue.

Je supposerai enfin qu'un objet transporté d'un point à un autre, dont la température est différente, se met immédiatement en équilibre calorifique avec son nouveau milieu.

Rien dans ces hypothèses n'est contradictoire ou inimaginable.

Un objet mobile deviendra alors de plus en plus petit à mesure qu'on se rapprochera de la sphère limite.

Observons d'abord que, si ce monde est limité au point de vue de notre géométrie habituelle, il paraîtra infini à ses habitants.

Quand ceux-ci, en effet, veulent se rapprocher de la sphère limite, ils se refroidissent et deviennent de plus en plus petits. Les pas qu'ils font sont donc aussi de plus en plus petits, de sorte qu'ils ne peuvent jamais atteindre la sphère limite.

Si, pour nous, la géométrie n'est que l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides invariables, pour ces êtres imaginaires, ce sera l'étude des lois suivant lesquelles se meuvent les solides déformés par ces différences de température dont je viens de parler.

Sans doute, dans notre monde, les solides naturels éprouvent également des variations de forme et de volume dues à l'échauffement ou au refroidissement. Mais nous négligeons ces variations en jetant les fondements de la géométrie ; car, outre qu'elles sont très faibles, elles sont irrégulières et nous paraissent par conséquent accidentelles.

Dans ce monde hypothétique, il n'en serait plus de même, et ces variations suivraient des lois régulières et très simples.

D'autre part, les diverses pièces solides dont se composerait le corps de ses habitants, subiraient les mêmes variations de forme et volume.

Je ferai encore une autre hypothèse; je supposerai que la lumière traverse des milieux diversement réfringents et de telle sorte que l'indice de réfraction soit inversement proportionnel à $R^2 - r^2$. Il est aisé de voir que, dans ces conditions, les rayons lumineux ne seraient pas rectilignes, mais circulaires.

... Ainsi des êtres comme nous, dont l'éducation se ferait dans un pareil monde, n'auraient pas la même géométrie que nous.»

Henri Poincaré, LA SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE , 1902

Henri Poincaré, vers 35 ans.

Henri Poincaré est un mathématicien, physicien, philosophe et ingénieur français né le 29 avril 1854 à Nancy et mort le 17 juillet 1912 à Paris.

Peut-être le plus grand mathématicien français de l'histoire, il est aussi considéré par beaucoup d'initiés comme le véritable inventeur de la théorie de la relativité restreinte (voir HLADIK).

BIBLIOGRAPHIE

MARTINET Jean, COURS DE GEOMETRIE, polycopiés de licence de mathématiques, Université Louis Pasteur, Strasbourg, 1978-1988

GHYS Etienne, POINCARE ET SON DISQUE, article, 2005

POINCARE Henri, LA SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE, Flammarion, 1968

LOBATCHEVSKI Nicolaï, LA THEORIE DES PARALLELES ,BNF, 1980

HLADIK Jean, Comment le jeune et ambitieux Einstein s'est approprié la relativité restreinte de Poincaré, Ellipses, 2004