Relations, droite et sphère d'Euler

Ibrahim Keita

« Lisez Euler, c'est notre maître à tous. »   *Pierre Simon de Laplace*

Il n'est peut-être pas inutile de rappeler que le tétraèdre est le polyèdre "le plus simple" : on ne peut avoir moins de 4 faces, 4 sommets et 6 arêtes (avec 3 sommets et 3 côtés, le triangle est le polygone "le plus simple").

Un tétraèdre n'a pas de diagonale (les six segments joignant deux des quatre sommets sont des arêtes).

Le volume V d'un tétraèdre est le tiers du volume du prisme qui a même base d'aire A et même hauteur h : **V=(A×h)/3**.

Chacune des faces du tétraèdre peut évidemment servir de base, comme chaque côté d'un triangle peut servir de base pour le calcul de son aire : A=(l×h)/2.

Généralisation des "centres" d'un triangle : tout tétraèdre est inscriptible dans une sphère et admet une sphère inscrite (tangente à ses faces).

Le centre de gravité (isobarycentre des sommets) est le point de concours des quatre segments joignant chacun un sommet au centre de gravité de la face opposée ; il est situé au quart de chacun de ces segments, en partant de la face.

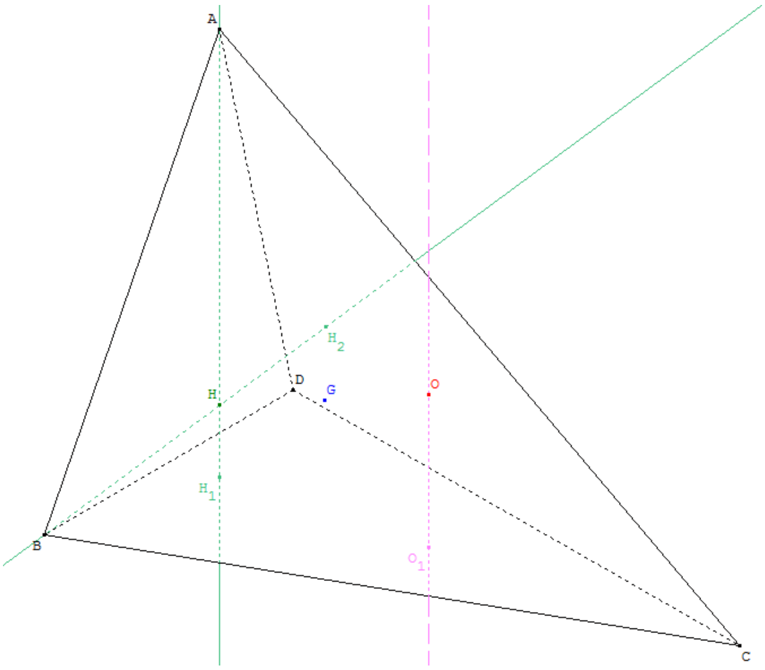
En général un tétraèdre n'a pas d'orthocentre. Mais une catégorie de tétraèdres possèdent un orthocentre: ce sont les tétraèdres orthocentriques.

Tétraèdre orthocentrique:

Un tétraèdre est orthocentrique si ses arrêtes opposées sont deux à deux orthogonales.

Considérons le triangle BCD (dans le plan xoy, par exemple de Geospace) H_1 son orthocentre, O_1 son centre du cercle circonscrit et O centre de la sphère circonscrite .

Soit A un point quelconque sur la droite h_1 perpendiculaire au plan BCD en H_1.



1. Le tétraèdre ABCD est orthocentrique.

p: (CD) $\perp$ (AH_1) et (CD) $\perp$ (BH_1)
entraînent (CD) $\perp$ (AB) ...

2. Le point H défini par

$$2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$$

est l'orthocentre du tétraèdre ABCD (la droite passant par H et un sommet est perpendiculaire à la face opposée).

p: Par Chasles $2\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OA} + 2\overrightarrow{AH}$, donc
$2\overrightarrow{AH} = -2\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$
$2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ et
$2\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{CD} + (\overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}).\overrightarrow{CD} = 0 + 0$
car (CD) $\perp$ (AB) et OC = OD.
(CD) $\perp$ (AH) et (CD) $\perp$ (AB)
donc (CD) $\perp$ (ABH)
Si on appelle A' l'intersection de (AH) et (BCD), on en déduit que (CD) $\perp$ (BA').
De la même façon, $2\overrightarrow{AH} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OD}$ et $2\overrightarrow{AH}.\overrightarrow{BD} = 0$, donc (BD) $\perp$ (ACH) , d'où (BD) $\perp$ (CA').
On en déduit que A'=H_1 est l'orthocentre de BCD et (AH) $\perp$ (BCD) en H_1.
On ferait la même chose avec B, C ou D. On vient de prouver :
H est l'orthocentre du tétraèdre ABCD et chacun de ses projetés sur une face est l'orthocentre de cette face.

Autres remarques sur les tétraèdres:

1. Les trois segments joignant les milieux de deux arêtes opposées sont concourants en leurs milieux qui est le centre de gravité G du tétraèdre.

p: G = barycentre((A;1) , (B;1) , (C;1) , (D;1)) = barycentre((I;2) , (J;2)) = milieu[IJ] si I et J sont les milieux de [AB] et [CD] , par l'associativité du barycentre.

2. Si O_1 est le centre du cercle circonscrit au triangle BCD (face opposée à A), la droite Δ_1 perpendiculaire en O_1 au plan (BCD) et le plan médiateur [AB] (plan perpendiculaire à [AB] en son milieu) se coupent en un point O qui est équidistant des quatre sommets; c'est donc le centre de la sphère circonscrite au tétraèdre ABCD.

3. Un tétraèdre qui a ses six arêtes égales est appelé régulier; il est orthocentrique et son centre de gravité est en même temps centre de la sphère circonscrite et orthocentre.

4. Un tétraèdre trirectangle en A (les angles BAC, CAD et DAB valent 90°) est orthocentrique et son orthocentre est A.

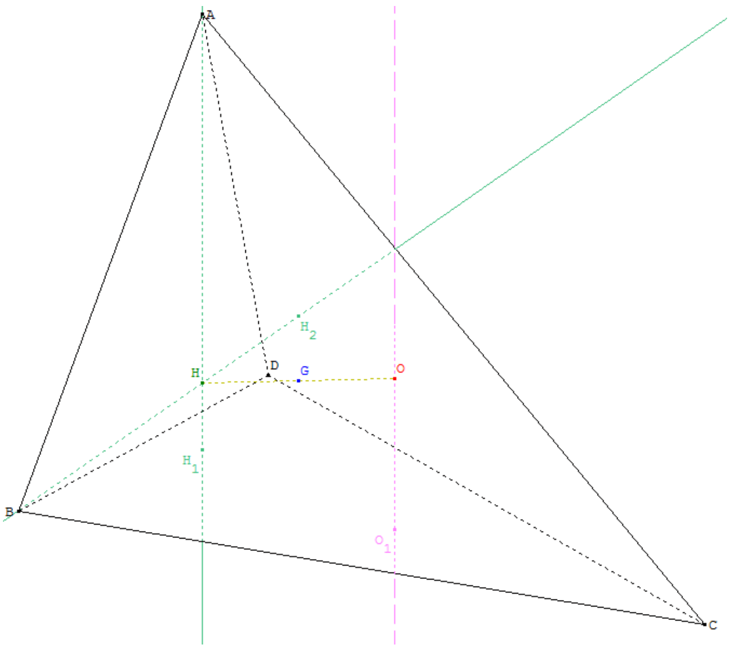
« Chez moi, les mathématiques sont l'étude des objets simples et donc je cherche la simplicité, la forme d'un nuage est déjà beaucoup trop difficile. » *Pierre Deligne*

La droite d'Euler:

Dans le tétraèdre orthocentrique ABCD, le centre de la sphère circonscrite, le centre de gravité et l'orthocentre sont alignés (droite d'Euler) et $\overrightarrow{OH} = 2\overrightarrow{OG}$.

p: De $2\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD}$ on tire par Chasles

$2\overrightarrow{OH} = 4\overrightarrow{OG} + \vec{0}$



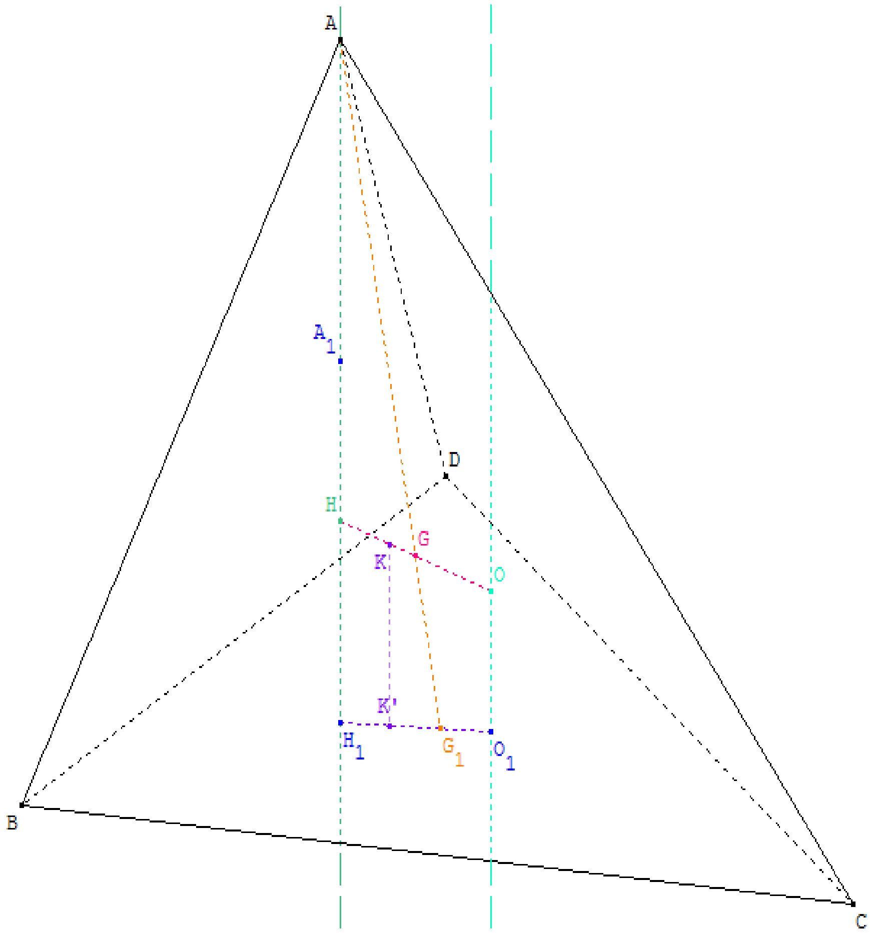
La première sphère d'Euler (sphère *des 12 points*) :

Soit G_1 le centre de gravité du triangle BCD. L'homothétie h_{11} de centre G et de rapport -1/3 transforme la sphère $\mathscr{S}$ de rayon R circonscrite au tétraèdre ABCD en une sphère $\mathscr{S}_1$ de centre K et de rayon R/3. Puisque $h_{11}(A) = G_1$, alors $G_1 \in \mathscr{S}_1$.

L'homothétie h_{12} de centre H et de rapport 1/3 transforme aussi la sphère $\mathscr{S}$ de rayon R en la sphère $\mathscr{S}_1$ de centre K et de rayon R/3. Puisque $h_{12}(A)=A_1$, alors $A_1 \in \mathscr{S}_1$.

Par projection orthogonale de (OH) sur le plan BCD, on a $H_1K' = 1/3.H_1O_1$ et comme $O_1G_1=1/3.O_1H_1$ (droite d'Euler du triangle BCD), on en déduit que K' est le milieu de $[H_1G_1]$ et $H_1 \in \mathscr{S}_1$.

En tenant compte des autres faces on peut affirmer que *les douze points A_i , G_i et H_i sont cosphériques.*



« Les sciences mathématiques en particulier mettent en évidence l'ordre, la symétrie et la limitation; et cela ce sont les grandes formes de la beauté. »   Aristote

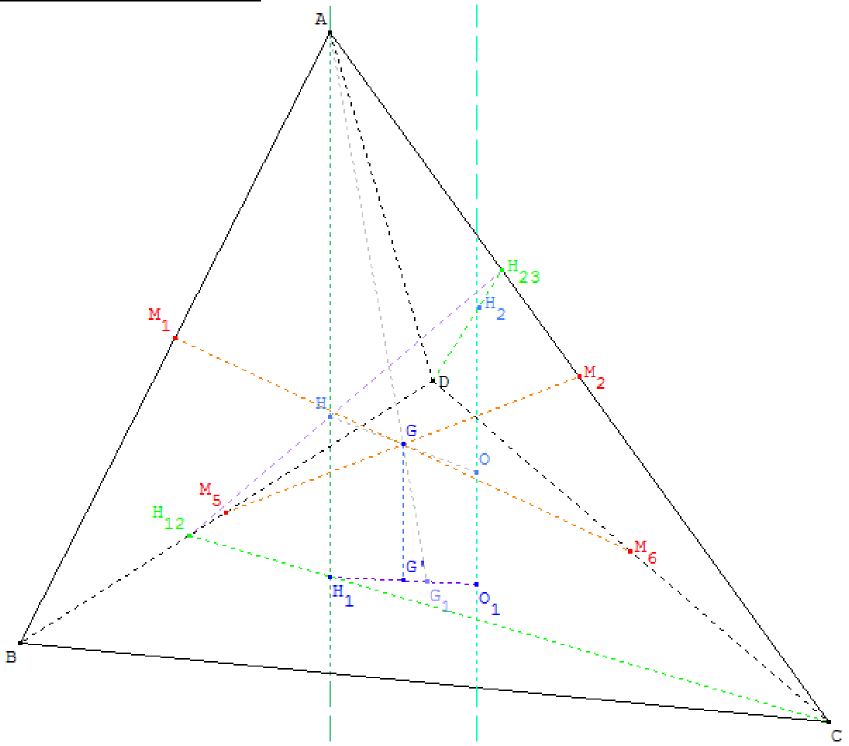
<u>La deuxième sphère d'Euler (sphère *des 24 points*) :</u>

G' est le projeté orthogonal de G sur (H_1O_1), les M_i sont les milieux des arrêtes de ABCD et les H_{ij} sont les pieds des hauteurs des faces du tétraèdre.

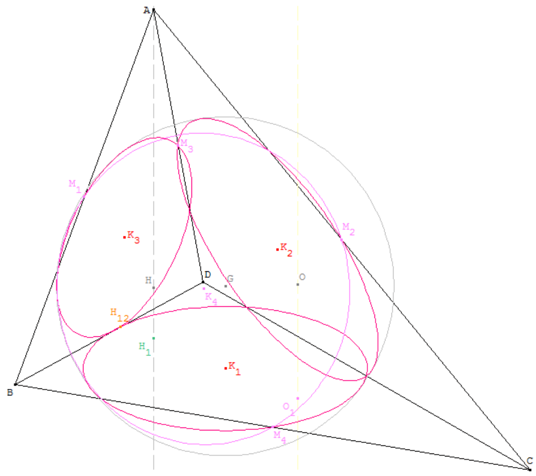
Remarque : $(H_{12}H_{23})$, par exemple, est la perpendiculaire commune aux arrêtes opposées [AC] et [BD].

Le quadrilatère $M_1M_2M_6M_5$ est un rectangle car $\overrightarrow{M_1M_2} = \overrightarrow{M_5M_6} = 1/2.\overrightarrow{BC}$ et $(M_1M_2) \perp (M_2M_6)$ puisque $(BC) \perp (AD)$. Donc $[M_1M_6]$ et $[M_2M_5]$ ont même longueur et se coupent en leur milieu qui est G (par l'associativité du barycentre).

Les six points M_i sont donc sur une sphère $\mathscr{S}_2$ de centre G. La sphère $\mathscr{S}_2$ coupe le plan BCD suivant un cercle $\mathscr{C}_1$ de centre G' (projeté de G) qui est aussi le milieu de $[H_1O_1]$. Le cercle $\mathscr{C}_1$ contient M_5 milieu de [BD] ; c'est donc le cercle d'Euler du triangle BCD (théorème d'Euler dans le plan).



La sphère $\mathscr{S}_2$ *coupe donc les quatre faces du tétraèdre suivant le cercle d'Euler de chacun de ces triangles.*



Remarques : Si d=M_1M_6 et r le rayon de $\mathscr{S}_2$, alors:

<u>R_1</u>. $d = \sqrt{(AD^2 + BC^2)}/2$

p: $M_1M_6^2 = M_1M_2^2 + M_2M_6^2 = (BC/2)^2 + (AD/2)^2$

<u>R_2</u>. $r = d/2$

<u>R_3</u>. $r^2 = R^2 - OG^2 - d^2/2$

p: $\overline{GM_1}^2 = (\overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_1})^2 = \overrightarrow{GO}^2 + R^2 - AB^2/4 + 2\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{OM_1}$

donc $r^2 = GO^2 + R^2 - CD^2/4 + 2\overrightarrow{GO}.\overrightarrow{OM_6}$ et par addition $2r^2 = \dots$

« Euler a cessé de vivre et de calculer. »

Déclaration du marquis de Condorcet à la mort du grand mathématicien suisse.

BIBLIOGRAPHIE

C.LEBOSSE et C.HEMERY, GEOMETRIE, Classe de Mathématiques, Fernand-Nathan, 1961