Relations, droite et cercle d'Euler

Ibrahim Keita

« *L'enseignement est le meilleur moyen d'apprendre, j'en suis toujours convaincu; en communiquant nos connaissances nous continuons à découvrir et à apprendre. En outre, cette activité nous oblige chaque fois à une nouvelle formulation de ce que nous désirons exprimer, nous force à de nouveaux essais, à la recherche constante de nouvelles méthodes. Les liens permanents avec la jeunesse nous aident à rester jeunes d'esprit, nous rendent capables de nous étonner constamment.* » Erno Rubik

La droite d'Euler :

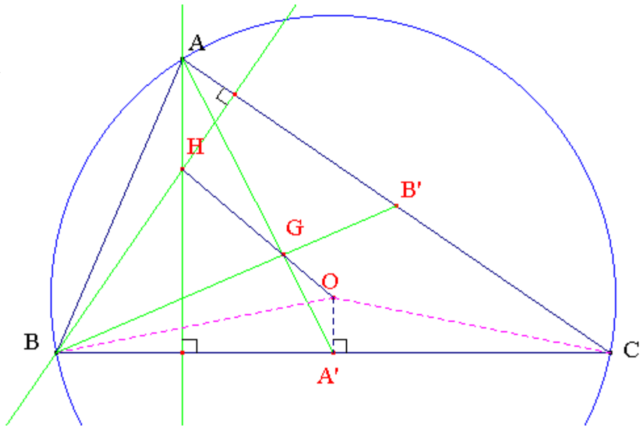
On se propose de montrer tout d'abord que dans un triangle ABC, d'orthocentre H, de centre de gravité G et dont le centre du cercle circonscrit Γ est noté O, on a :

1. Relation d'Euler: $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$.

p: H ainsi défini est bien l'orthocentre de ABC car on en tire $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}$ puis, avec A' milieu de [BC], $\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=2\overrightarrow{OA'}$; donc (AH) $\perp$ (BC).
On fait la même chose pour B et C.

2. Droite d'Euler: $\overrightarrow{OH}=3\overrightarrow{OG}$

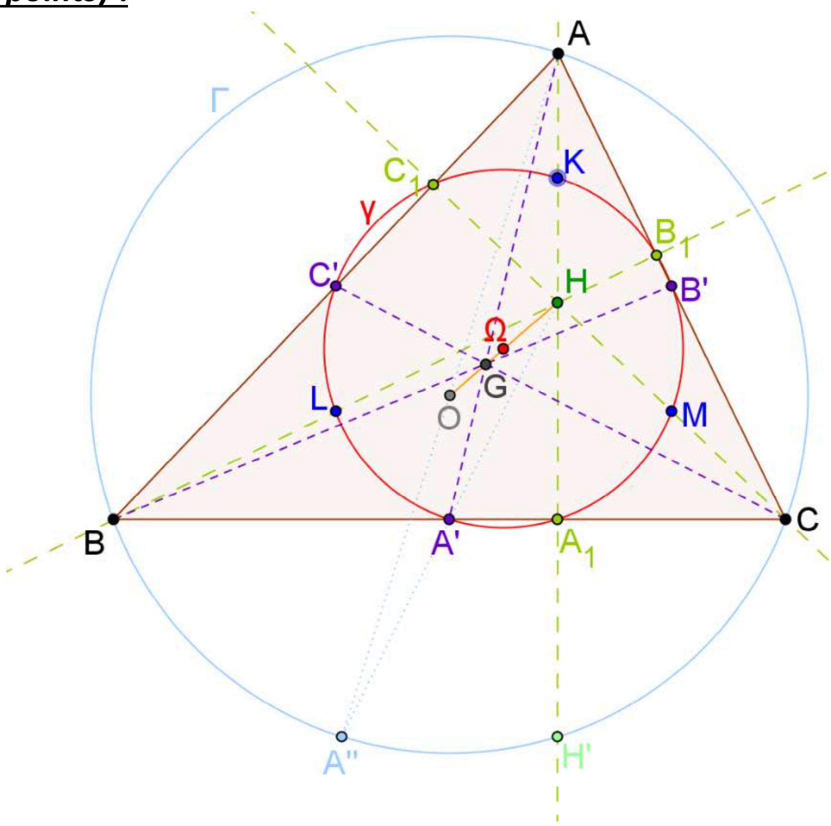
p: $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=3\overrightarrow{OG}+\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC}=\cdots$ par Chasles



«*Tous les mathématiciens sont les disciples d'Euler.*» Condorcet

Le cercle d'Euler (*cercle des neuf points*) :

Dans le triangle ABC on note A', B', C' les pieds des médianes, A_1, B_1, C_1 les pieds des hauteurs, K, L et M les milieux de AH, BH et CH. On note Ω le milieu de [OH] et H' le second point d'intersection de (AH) avec le cercle Γ circonscrit au triangle ABC.



1. Montrer que A' est le milieu de [A''H] puis que A_1 est le milieu de [HH']. On retrouve ainsi que :
Le symétrique de l'orthocentre par rapport à un côté du triangle est situé sur le cercle circonscrit.

2. On considère maintenant l'homothétie *h* de centre H qui transforme A'' en A'. Justifier que $h(O)=\Omega$ et que l'image de Γ par h est le cercle circonscrit au triangle A'B'C' que nous notons γ. Le rayon de ce cercle est donc la moitié de celui de Γ.

3. Justifier que γ passe par A_1 , A', B_1, B', C_1, C' d'une part et K, L, M d'autre part : c'est *le cercle des neuf points.*