Transformation en Z

Ibrahim Keita

Dans les cas où le signal n'est pas continu (non analogique par exemple) mais discret (numérique par exemple), au lieu d'une transformation de Laplace, on effectue une transformation en Z.

I. SERIE ENTIERE

1. Définition

Une série entière $\sum_n u_n$ est une série de terme général $u_n = a_n z^n$ avec a_n réel et $z \in \mathbb{C}$.

Exemple : La série $\sum_n z^n$.

2. Propriété

Pour toute série entière $\sum_n a_n z^n$, il existe un réel R (pouvant être l'infini par généralisation) tel que

- si $|z| < \mathrm{R}$ alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ est convergente,
- si $|z| > \mathrm{R}$ alors la série entière $\sum_n a_n z^n$ est divergente.

Exemple : Etude de la série entière $\sum_n z^n$. Puisque $S_n = 1 + z + z^2 + \ldots + z^n = \dfrac{1-z^{n+1}}{1-z}$, on peut en déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum_n z^n$ est R = 1 ; et $\sum_{n\geq 0} z^n = \dfrac{1}{1-z}$ si $|z| < 1$ (puisque dans ce cas $\lim_{n\to+\infty} z^{n+1} = 0$).

3. Développements classiques

On peut montrer que les séries ci-dessous sont convergentes (pour certaines valeurs de *t*) et qu'on a :

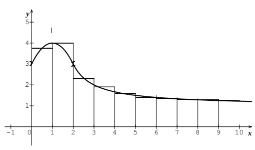
$$e^t = 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + \ldots + \frac{1}{n!}t^n + \ldots \quad ; \quad \frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + \ldots + t^n + \ldots$$

$$\sin t = 1 - \frac{1}{3!}t^3 + \frac{1}{5!}t^5 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)!}t^{2n+1} + \ldots \quad ; \quad \cos t = 1 - \frac{1}{2!}t^2 + \frac{1}{4!}t^4 + \ldots + (-1)^n \frac{1}{(2n)!}t^{2n} + \ldots$$

$$(1+t)^\alpha = 1 + \frac{\alpha}{1!}t + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}t^2 + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}t^n + \ldots$$

II. TRANSFORMATION EN Z

L'un des objectifs est, par exemple, quand on découpe un signal continu (analogique) en signal discret (numérique), de procéder d'une façon similaire à ce qu'on fait pour la transformation de Laplace.



x(n)=f(n) pour n prenant les valeurs 1, 2, 3, …, et généralement, on prend un pas de 1 (petites unités de temps).

1. Principaux signaux causaux discrets

Echelon unité discret : $e(n)=1$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Impulsion unité discrète : $d(0)=1$ et $d(n)=0$ pour $n\geq 1$.

Rampe causale discrète : $r(n)=n$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Signal causal carré discret : $c(n)=n^2$ pour $n\in\mathbb{N}$.

Signal causal exponentiel discret : $x(n)=a^n$ ($a>0$) pour $n\in\mathbb{N}$.

2. Définition

Si $x(n)$ est un signal causal discret, la transformée en Z de x est la fonction

$Z_x(z)=\sum_{n\geq 0}(x(n)/z^n)$ (quand cette série converge).

Exemple : Si le signal x est l'échelon unité e, on a :

$$Z_e(z)=\sum_{n\geq 0}e(n)/z^n=\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\frac{1}{1-1/z}=\frac{z}{z-1} \quad \text{si } |z|>1 \text{ (à expliquer)}.$$

3. Propriétés

Il y a linéarité de la transformation en Z et les résultats utiles sont donnés dans le formulaire du BTS.

Si $e(n)=1$, alors $Z_e(z)=\dfrac{z}{z-1}$.

Si $d(0)=1$ et $d(n)=0$ ($n\neq 0$), alors $Z_d(z)=1$.

Si $r(n)=n$, alors $Z_r(z)=\dfrac{z}{(z-1)^2}$.

Si $c(n)=n^2$, alors $Z_c(z)=\dfrac{z(z+1)}{(z-1)^3}$.

Si $f(n)=a^n$ ($a\neq 0$), alors $Z_f(z)=\dfrac{z}{z-a}$.

Si $y(n)=a^n x(n)$ ($a\neq 0$), alors $Z_y(z)=Z_x\left(\dfrac{z}{a}\right)$.

Si $y(n)=x(n-n_0)$ ($n\geq n_0$), alors $Z_y(z)=z^{-n_0}Z_x(z)$.

Si $y(n)=x(n+1)$, alors $Z_y(z)=z\left(Z_x(z)-x(0)\right)$.

Si $y(n)=x(n+2)$, alors $Z_y(z)=z^2\left(Z_x(z)-x(0)-x(1)z^{-1}\right)$.

Si $y(n)=x(n+n_0)$ ($n_0>0$), alors $Z_y(z)=z^{n_0}\left(Z_x(z)-x(0)-x(1)z^{-1}\ldots-x(n_0-1)z^{-(n_0-1)}\right)$.

III. APPLICATION: EQUATION AUX DIFFERENCES

Soit $x(n)$ le signal causal discret défini pour tout $n\in\mathbb{N}$ par (l'équation aux différences):

$x(n+2)=3x(n+1)-2x(n)$ avec $x(0)=0$ et $x(1)=1$.

On va chercher la forme du signal $x(n)$ à l'aide de la transformation en Z.

1. Transformation du signal

Pour simplifier les notations, appelons $X(z) = Z_x(z)$ la transformée en Z du signal $x(n)$.

En appliquant la transformation en Z à l'équation aux différences on obtient:

$$z^2\left(X(z) - x(0) - x(1)z^{-1}\right) = 3z\left(X(z) - x(0)\right) - 2X(z)$$

Donc $z^2\left(X(z) - 0 - 1/z\right) = 3z\left(X(z) - 0\right) - 2X(z)$

$$z^2X(z) - z = 3zX(z) - 2X(z)$$

$$\left(z^2 - 3z + 2\right)X(z) = z$$

$$X(z) = \frac{z}{z^2 - 3z + 2}$$

2. Détermination du signal original $x(n)$

Par décomposition, on a: $\dfrac{1}{z^2 - 3z + 2} = \dfrac{1}{(z-2)(z-1)} = \dfrac{1}{z-2} - \dfrac{1}{z-1}$.

Donc: $X(z) = \dfrac{z}{z-2} - \dfrac{z}{z-1}$

Puisque: $Z_{a^n}(z) = \dfrac{z}{z-a}$ et $Z_e(z) = \dfrac{z}{z-1}$,

on en déduit que: $x(n) = 2^n - e(n)$,

c'est-à-dire $x(n) = 2^n - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.