Transformation de Laplace

Ibrahim Keita

L'étude de la transformation de Laplace a pour but d'introduire une nouvelle méthode de résolution des équations différentielles. Cette méthode est demandée explicitement dans certaines questions ; ce qui rend l'étude de ce chapitre indispensable.

I. DEFINITIONS

1. Fonctions causales

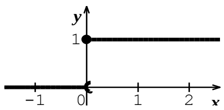
a) La fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est causale si *f(t)=0* pour *t<0*.

Exemple : f(t)=0 si $t < 0$ et *f(t)=2t* si $t \geq 0$.

b) La fonction causale la plus utilisée est la fonction échelon unité, notée U et définie par :

$$U(t) = \begin{cases} 0 \ \ si \ \ t < 0 \\ 1 \ \ si \ \ t \geq 0 \end{cases}$$

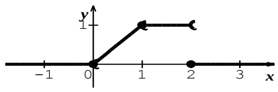
de courbe



2. Exemple de signal rencontré en physique

$$f(t) = tU(t) - (t-1)U(t-1) - U(t-2)$$

de courbe



(*pour tracer la courbe, écrire l'expression de la fonction dans chacun des intervalles]-∞ ; 0[, [0 ; 1[, [1 ; 2[et [2 ; +∞[*) .

3. Intégrale généralisée

Soit a un réel donné et f une fonction intégrable sur [a ; +∞[. Si l'intégrale $\int_a^x f(t)dt$ admet une limite finie quand $x \to +\infty$, on dit que l'intégrale généralisée $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ converge.

Exemple :

L'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt$ *converge car, pour tout x>1,* $\int_1^x \frac{1}{t^2} dt = \left[-\frac{1}{t} \right]_1^x = \left(-\frac{1}{x} \right) - \left(-\frac{1}{1} \right) = 1 - \frac{1}{x}$

et $\lim_{x \to +\infty} \left(1 - \frac{1}{x} \right) = 1 - 0 = 1$ *donc :* $I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = 1$.

4. Transformée de Laplace d'une fonction causale f

On appelle transformée de Laplace de la fonction causale f , la fonction *L(f(t))* définie par

$$L(f(t)) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt} dt$$

II. TRANSFORMEES DE LAPLACE CLASSIQUES

Comme pour le calcul des dérivées, il y a des TL (transformée de Laplace) de base qui nous servirons à faire les TL demandées. Ces TL figurent aussi dans le Formulaire officiel du BTS.

1. Fonction échelon unité

La transformée de Laplace de U est :

$$L(U(t)) = \frac{1}{p}$$

car : $L(U(t)) = \int_0^{+\infty} 1.e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} e^{-pt}dt = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_{t=0}^{t=+\infty} = \left(\frac{0}{-p}\right) - \left(\frac{1}{-p}\right) = 0 + \frac{1}{p} = \frac{1}{p}$.

2. Fonction puissance

La transformée de Laplace de $t^n\,U(t)$ est $\frac{n!}{p^{n+1}}$.

3. Fonctions exponentielles

La transformée de Laplace de $e^{-at}\,U(t)$ est $\frac{1}{p+a}$.

4. Fonctions trigonométriques

La transformée de Laplace de $\cos\omega t.U(t)$ est $\frac{p}{p^2+\omega^2}$ et celle de $\sin\omega t.U(t)$ est $\frac{\omega}{p^2+\omega^2}$.

III. PROPRIETES DE LA TRANSFORMATION DE LAPLACE

La transformée de Laplace de *f(t)* sera notée *F(p)* , celle de *g(t)* sera *G(p)* , etc.

1. Linéarité

Si on a les transformées de Laplace de f et de g, alors la transformée de $\lambda f + \mu g$ est $\lambda F + \mu G$.

2. Fonctions composées et produits

$$L(f(\alpha t)U(t)) = \frac{1}{\alpha}F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \qquad ; \qquad L(f(t)e^{-at}U(t)) = F(p+a) \quad .$$

Exemple : Déterminer la TL de $\cos 3t\, e^{-2t}\, U(t)$.

Ici on prend la deuxième formule avec a=2 ; f(t)=cos3t est transformé en $\frac{p}{p^2+3^2}$ *, mais pris au point p+2 on doit remplacer p par p+2 . Ce qui donne finalement* $\frac{p+2}{(p+2)^2+9}$.

3. Fonctions dérivées

$$L(f'(t)U(t)) = pF(p) - f(0^+) \qquad \text{et} \qquad L(f''(t)U(t)) = p^2F(p) - p\,f(0^+) - f'(0^+)\ .$$

Notons qu'il existe d'autres TL données en cas de besoin dans le formulaire du BTS.

IV. APPLICATION : RESOLUTION D'EQUATION DIFFERENTIELLE

Supposons que nous ayons à résoudre l'équation différentielle

(E) $x''(t) + 4\,x(t) = \cos 3t$ avec $x(t)$ nulle pour $t<0$, et vérifiant $x(0^+) = 1$, $x'(0^+) = 0$.

En prenant la TL de chaque membre de l'équation, on obtient :

$L(x''(t)) + 4L(x(t)) = L(\cos 3t)$

En notant $L(x(t)) = X(p,)$ *on a* $L(x''(t)) = p^2X(p) - p\,x(0^+) - x'(0^+) = p^2X(p) - p$ et $L(\cos 3t) = \dfrac{p}{p^2+3^2}$.

On a alors : $p^2X(p) - p + 4X(p) = \dfrac{p}{p^2+3^2}$.

Soit : $(p^2+4)X(p) = \dfrac{p}{p^2+3^2} + p$

et : $X(p) = \dfrac{p}{(p^2+3^2)(p^2+4)} + \dfrac{p}{p^2+4}$.

En remarquant que $\dfrac{p}{(p^2+3^2)(p^2+4)} = \dfrac{1}{5}\dfrac{p}{p^2+4} - \dfrac{1}{5}\dfrac{p}{p^2+3^2}$,

on a : $X(p) = \dfrac{1}{5}\dfrac{p}{p^2+4} - \dfrac{1}{5}\dfrac{p}{p^2+3^2} + \dfrac{p}{p^2+4}$,

soit : $X(p) = \dfrac{6}{5}\dfrac{p}{p^2+2^2} - \dfrac{1}{5}\dfrac{p}{p^2+3^2}$.

Puisque la TL de $\cos\omega t$ est $\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$, il apparaît que la fonction $x(t)$ (l'original de $X(p)$) est :

$$x(t) = \frac{6}{5}\cos 2t - \frac{1}{5}\cos 3t \qquad \text{pour } t > 0\ .$$