Suites-Séries-Fourier

Ibrahim Keita

Les suites numériques interviennent dans l'étude des phénomènes discrets. L'étude des séries permet de comprendre la décomposition en série de Fourier nécessaire pour les signaux périodiques des phénomènes vibratoires en physique.

I. SUITES NUMERIQUES

1. Définitions

a) Une suite est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.

A tout entier *n* on fait correspondre *u(n)*, noté plus couramment u_n .

Exemple : On peut définir les suites $u_n = 2n+1$, $v_n = \sqrt{n^2+1}$ et $w_n = \dfrac{n-1}{2n+3}$.

b) La suite u_n est croissante si, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \geq u_n$.

2. Suite arithmétique

a) La suite u_n est arithmétique de raison *r* (*r* constante réelle non nulle) si, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = u_n + r$ et u_0 donné .

Exemple : La suite $u_n = -2n+3$ est arithmétique car $u_{n+1} - u_n = (-2(n+1)+3) - (-2n+3) = -2$ et de raison -2 .

b) Si la suite u_n est arithmétique de raison *r*, alors, pour tout $n \geq 0$:

▪ $u_n = u_0 + nr$

▪ $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = u_0 + nu_0 + (1+2+\ldots+n)r = (n+1)u_0 + \dfrac{n(n+1)}{2} r = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$

▪ La limite de u_n quand $n \to +\infty$ est $+\infty$ si $r > 0$ et $-\infty$ si $r < 0$.

3. Suite géométrique

a) La suite u_n est géometrique de raison *a* (*a* constante réelle non nulle) si, pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} = au_n$ et u_0 donné .

Exemple : La suite $u_n = (-2)^n$ est géométrique car $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{(-2)^{n+1}}{(-2)^n} = -2$ et de raison -2 .

b) Si la suite u_n est géométrique de raison *a*, alors, pour tout $n \geq 0$:

▪ $u_n = a^n u_0$ (u_n est toujours égale à *1* si *a=1*)

▪ $u_0 + u_1 + \ldots + u_n = (1 + a + \ldots + a^n)u_0 = \dfrac{1-a^{n+1}}{1-a}u_0$ pour $a \neq 1$ (sinon la somme vaut $(n+1)u_0$) .

▪ La limite de a^n quand $n \to +\infty$ est $+\infty$ si $a > 1$ et 0 si $-1 < a < 1$ (sinon a^n n'a pas de limite). On en déduit la limite de $u_n = a^n u_0$.

II. SERIES NUMERIQUES

1. Définitions

a) Si u_n est une suite numérique, la série de terme général u_n est la suite S_n telle que

$S_n = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$ notée aussi $S_n = \sum_{i=0}^{n} u_i$.

b) S_n est appelée somme partielle d'ordre n (ou d'indice n) de la série de terme général u_n .

2. Convergence

a) La série de terme général u_n est convergente si $\lim_{n\to\infty} S_n$ existe et est finie. Cette limite S est alors appelée somme de la série de terme général u_n et notée $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ ou encore $S = \sum_{n\geq 0} u_n$.

b) Si la suite S_n n'admet pas de limite finie on dit que la série de terme général u_n est divergente.

c) *Théorème.* Si la série de terme général u_n est convergente, alors $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$ (la réciproque est fausse).

Conséquence. Si $\lim_{n\to\infty} u_n \neq 0$, alors la série de terme général u_n est divergente.

d) *Absolue convergence.* Si la série de terme général $|u_n|$ est convergente, alors la série de terme général u_n est convergente. On dit que la série de terme général u_n est absolument convergente.

3. Série géométrique

Théorème. La série de terme général b^n est convergente si $|b|<1$, et divergente sinon.

4. Séries à termes positifs (pour tout n, $u_n > 0$)

a) *Série de Riemann.*

La série de Riemann de terme général $u_n = \dfrac{1}{n^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

b) *Comparaison.*

▪ Si $0 \leq u_n \leq v_n$ pour tout n ; alors la convergence de la série v_n entraîne la convergence de la série u_n , et la divergence de la série u_n entraîne la divergence de la série v_n .

▪ Si les séries u_n et v_n sont équivalentes (c'est-à-dire $\lim_{n\to\infty} \dfrac{u_n}{v_n} = 1$); alors les séries u_n et v_n sont de même nature.

c) *Règle de D'alembert.*

Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$, alors la série de terme général u_n est convergente. Si $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, alors la série de terme général u_n est divergente.

5. Série alternée

a) Une série alternée est une série de terme général u_n telle que pour tout n, u_n et u_{n+1} ont des signes différents.

b) *Théorème.* Si $|u_n|$ est décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$; alors la série alternée de terme général u_n converge.

Exemple : La série alternée de terme général $u_n = (-1)^n \frac{1}{n}$ est convergente. (*A montrer*)

III. SERIE DE FOURIER

Le but est d'approximer une fonction périodique donnée f par une série trigonométrique.

1. Définition

a) *Rappel*. Une fonction f est périodique et de période T (ou T-périodique) si $f(x+T)=f(x)$ pour tout x du domaine de définition $\mathscr{D}_f$ de f.

Exemple : sin x et cos x sont 2π-périodiques ; tan x est π-périodique.

b) *Développement en série de Fourier.* La fonction f , T-périodique, admet un développement en série de Fourier (DSF) si il existe des constantes réelles a_n et b_n telles que, pour x de $\mathscr{D}_f$

$$f(x) = a_0 + \sum_{n\geq 1} \left(a_n \cos(n\omega x) + b_n \sin(n\omega x) \right)$$

avec : $a_0 = \frac{1}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)dt$, $a_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\cos(n\omega t)dt$ et $b_n = \frac{2}{T}\int_\alpha^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt$

où : α désigne un réel quelconque de $\mathscr{D}_f$ et $\omega = \frac{2\pi}{T}$.

Les constantes réelles a_n et b_n ainsi définies sont appelées coefficients de Fourier de la fonction f.

a) *Remarque*. Si la fonction f est paire, alors les b_n sont nuls.

Si la fonction f est impaire, alors les a_n sont nuls.

Exemple : Soit f la fonction 2π-périodique définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} x & si \quad -\pi < x < \pi \\ 0 & si \quad x = \pi \end{cases}$.

On veut faire le développement en série de Fourier de f.

▪ Représenter la fonction f entre $-\pi$ et $+3\pi$. (*A faire)*.

▪ La fonction f est impaire, donc les coefficients a_i sont nuls.

Le DSF de f ne fait intervenir que les coefficients b_i .

▪ Calculons les coefficients b_i :

$$b_n = \frac{2}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T} f(t)\sin(n\omega t)dt = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt \quad \text{puisque } \omega = \frac{2\pi}{2\pi} = 1 \ .$$

Une intégration par parties (en posant $u=t$ et $v'=\sin(nt)$) permet d'avoir :

$$b_n = \frac{2}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} t\sin(nt)dt = \frac{1}{\pi}\left[-t\frac{\cos(nt)}{n}\right]_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nt)dt = \frac{-2\pi}{n\pi}\cos(n\pi) = (-1)^{n+1}\frac{2}{n} \ .$$

▪ Le DSF de f est alors :

$$f(x) = \sum_{n\geq 1} b_n \sin(nx) = \sum_{n\geq 1}(-1)^{n+1}\frac{2}{n}\sin(nx) = 2\left(\sin x - \frac{1}{2}\sin(2x) + \frac{1}{3}\sin(3x) + \ldots\right) .$$

2. Conditions de Dirichlet

Nous admettrons que les fonctions usuelles à étudier admettent un DSF ; en particulier les fonctions dérivables à dérivée continue sauf en un nombre fini de points où elles ont une limite à gauche et à droite. En un tel point x_0, f sera défini par *$f(x_0)$=(limite à gauche + limite à droite)/2* .

3. Formule de Parseval

Si f admet un DSF ; alors

$$\frac{1}{T}\int_{\alpha}^{\alpha+T}(f(x))^2 dx = a_0{}^2 + \sum_{n\geq 1}\frac{a_n{}^2 + b_n{}^2}{2} \ .$$