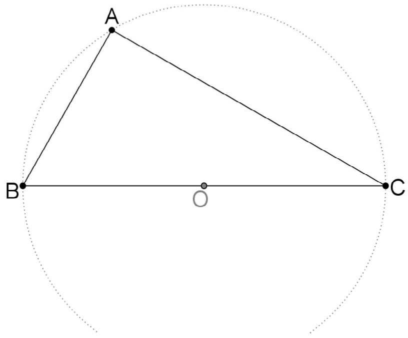
Pour jouer avec Pythagore

Ibrahim Keita

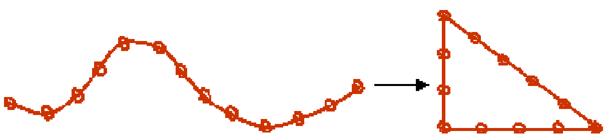
Le prince de Phlius, demanda à Pythagore comment il se définissait.
"Je suis un philosophe", répondit-il.
"Certains sont menés par l'amour et la richesse, d'autres guidés aveuglement par la soif insensée de puissance et de domination, mais l'homme le plus noble se consacre à la découverte du sens et du but de la vie. Il cherche à découvrir les secrets de la nature. C'est lui que j'appelle un philosophe."

INTRODUCTION

« Qui parle sème ; qui écoute récolte. » Pythagore



Pythagore de Samos, mathématicien grec du sixième siècle av JC, est l'un des plus célèbres mathématiciens de l'histoire grâce à son théorème que tout le monde connaît:
" ABC est un triangle rectangle en A, si et seulement si $AB^2 + AC^2 = BC^2$ ".
Mais Pythagore était avant tout un philosophe, dont les enseignements généraux pouvaient être suivis par un public élargi, les pythagoristes (ou acousmaticiens c'est-à-dire le grand public s'intéressant à Pythagore). Les initiés s'appelaient les pythagoriciens.
Le relation de Pythagore était connue des anciens égyptiens qui utilisaient la corde à 13 nœuds pour construire des angles droits dans leurs constructions. C'est sans doute après l'avoir vue lors de son voyage à Alexandrie que Pythagore a voulu démontrer le célèbre théorème. C'est ce souci de la démonstration, la classification des nombres (carrés, triangulaires, nombre d'or) qui ont fait dire à Aristote que "*Les pythagoriciens sont les premiers qui firent progresser les mathématiques*".



LE THEOREME DE PYTHAGORE

« Les schémas du mathématicien, comme ceux du peintre ou du poète, doivent être beaux ; les idées, comme les couleurs ou les mots, doivent s'assembler de façon harmonieuse. La beauté est le premier test: il n'y a pas de place durable dans le monde pour les mathématiques laides. » G.H Hardi

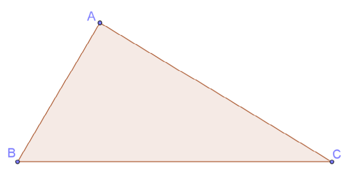
On a répertorié des centaines de démonstrations du plus célèbre des théorèmes. En voici quelques unes.

1. Produit scalaire.

p: Si ABC est rectangle en A,

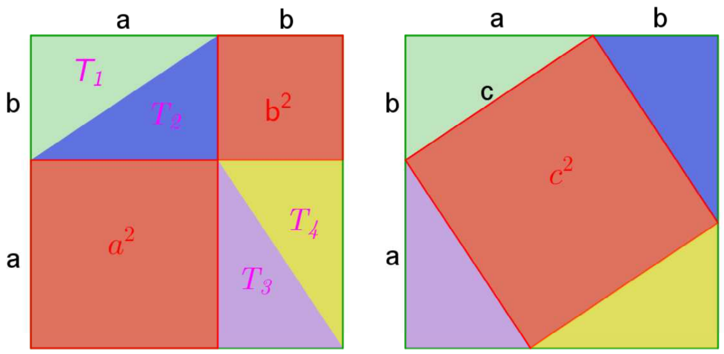
$$\vec{BC} = \vec{BA} + \vec{AC}$$

Donc:
$$\vec{BC}^2 = \left(\vec{BA} + \vec{AC}\right)^2$$
$$\vec{BC}^2 = \vec{BA}^2 + \ldots.$$



2. Le puzzle à moitié vide

p: Si les côtés du triangle T_1 valent a, b et c, expliquer cette démonstration en comparant les surfaces dans les deux carrés.



3. La démonstration indienne

p: Si S est la surface totale du carré,

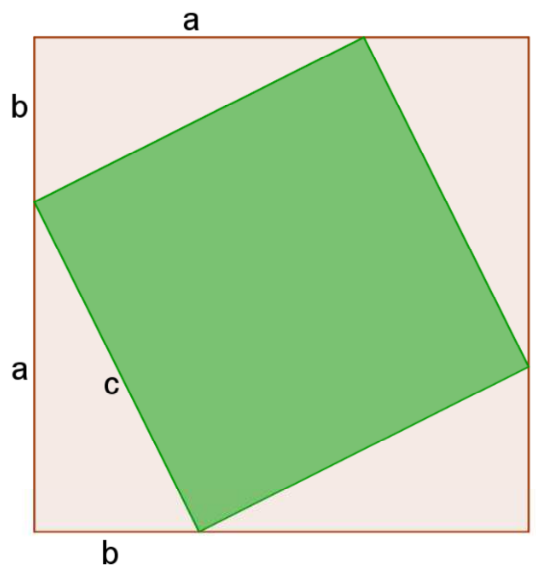
$$S=(a+b)^2=...$$

et

$$S=c^2+... \quad .$$

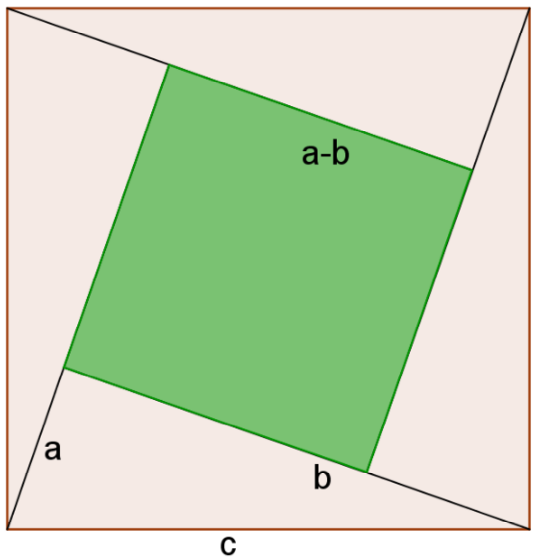
Donc:

$$a^2+b^2=c^2.$$



4. La démonstration de Bhaskara

p:

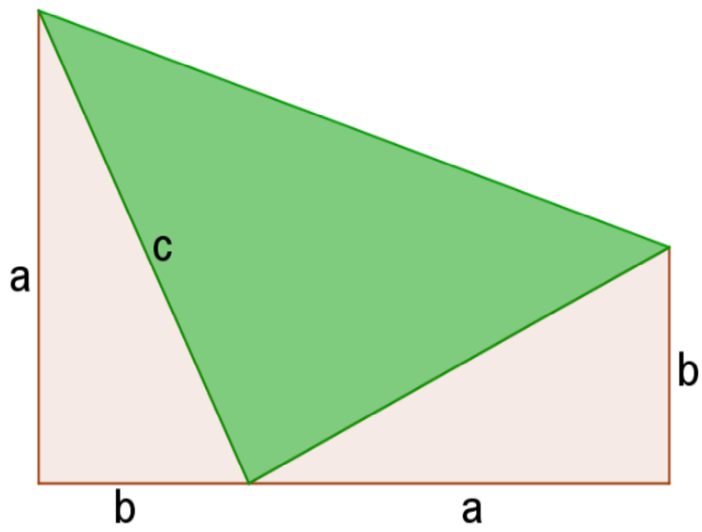


5. La démonstration du président américain Garfield

p: La surface S d'un trapèze est

$$S=\frac{1}{2}(GrandeBase+PetiteBase).hauteur$$

Donc ...

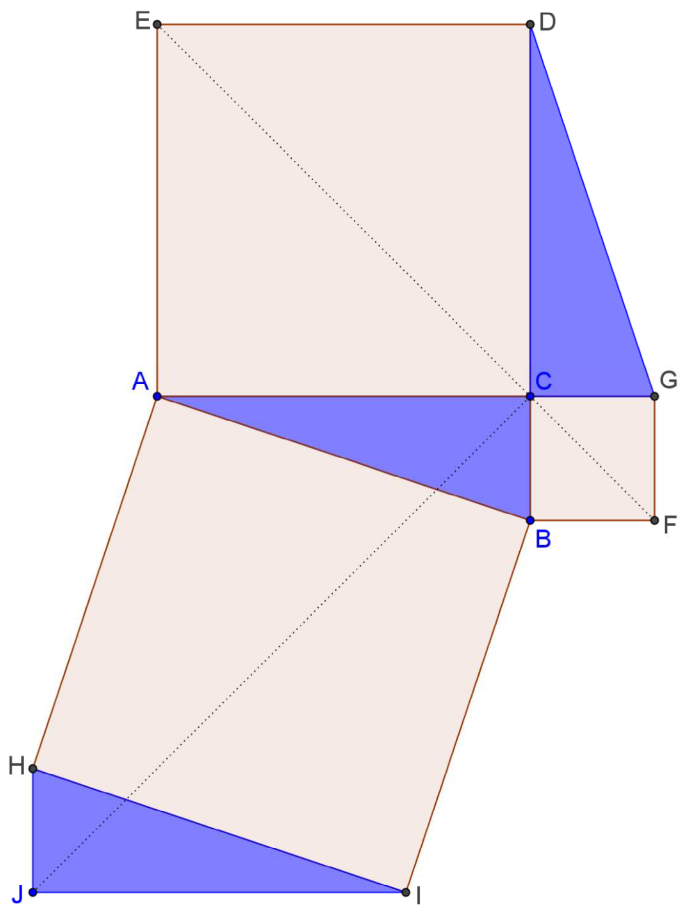


6. La démonstration de Léonard de Vinci

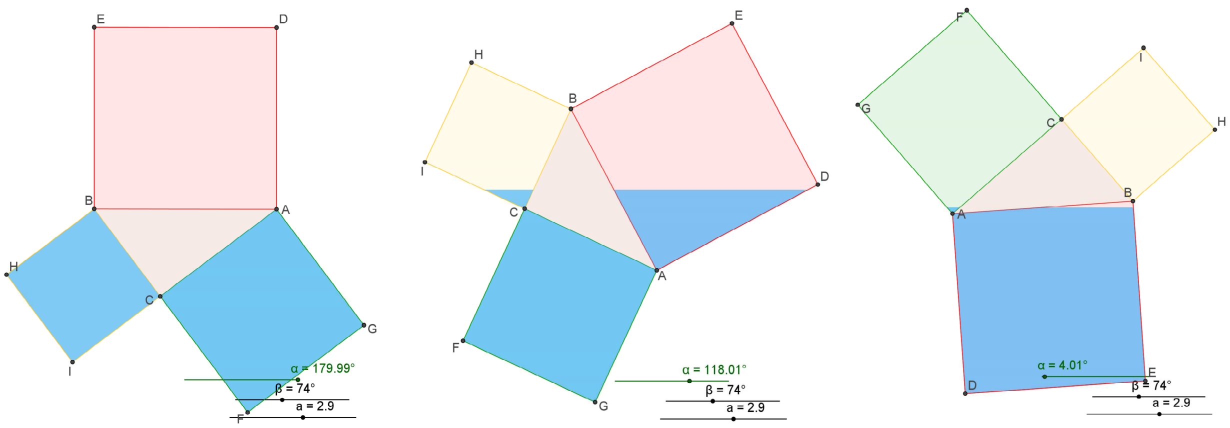
p:
Sur les côtés du triangle initial ABC, Vinci a construit des carrés. Les trois triangles ACB, DCG et IJH sont égaux.

Les segments [JC] et [EF] permettent de délimiter 4 quadrilatères ABFE, DGFE, AHJC et IBCJ.
▪ABFE et DGFE sont superposables (symétrie par rapport à (EF)).
▪AHJC et IBCJ sont superposables (symétrie par rapport au milieu K de ABIH qui est le milieu de [JC] puisque J est le symétrique de C).
▪Les quadrilatères IBCJ et ABFE sont superposables (on passe de ABFE à IBCJ par la translation de vecteur $\overrightarrow{AI}$ suivie de la rotation de centre I et d'angle 90°.

On en déduit que les 4 quadrilatères ABFE, DGFE, AHJC et IBCJ ont même aire.
Donc
$\mathcal{A}_{ABFE} + \mathcal{A}_{DGFE} = \mathcal{A}_{AHJC} + \mathcal{A}_{IBCJ}$
d'où ...



7. La démonstration "physique"

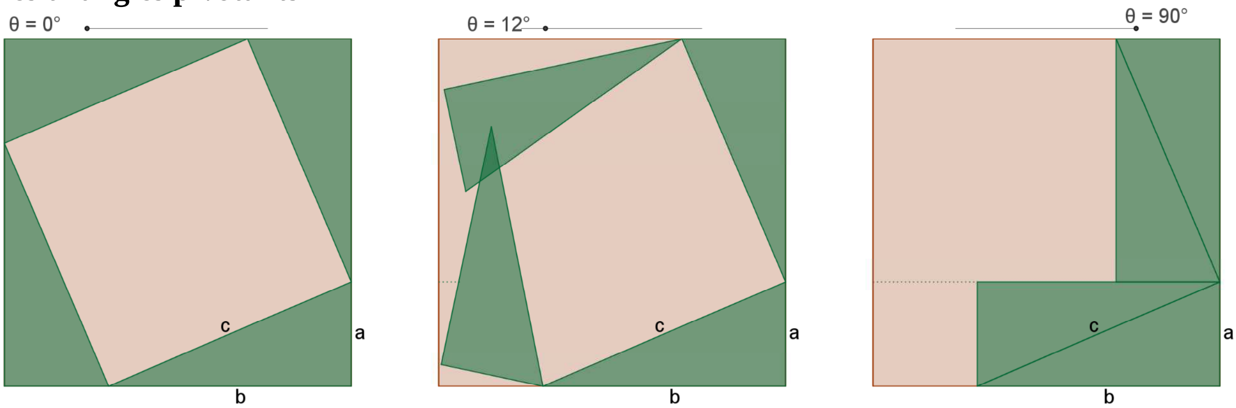


Création du fichier Geogebra pour voir le déversement de l'eau dans le carré BADE.
Deux curseurs α et β avec l'angle variant de 0.01 à 179.99°, incrément 1°. Deux points variables A=(-3;α) et B=(3;α). Un point variable C=(-3; a+β) pour envisager tous les cas de triangle rectangle ABC.
Polygone(ABC) pour construire le triangle ABC.
Polygone régulier(A,B,4) pour construire les carrés ABDE puis ACGF et BCHI sur les côtés du triangle ABC; on peut les colorier différemment.
Pour matérialiser les vases communicants:

- Si α ϵ[0 ; 43°[, définir J Intersection(axeX (en dehors de la figure) , [BC]) et K intersection de [BI] et axeX. Définir Polygone(AFGJKIHA) (dans l'ordre) et colorier en bleu.
- Si α ϵ[43° ; 129°[, définir L Intersection(axeX (en dehors de la figure) , [HI]). Définir Polygone(AFGJLHA) (dans l'ordre) et colorier en bleu.
- ...

Ne pas afficher ensuite les étiquettes et points inutiles et le tour est joué.

8. Les triangles pivotants



p: Construire A(0,0) , B(1,0) et le carré ABCD avec Polygone régulier(A,B,4). Définir le Curseur(a,[0;0.5], pas=0.1) et le mettre à 0.3 par exemple. Définir E=(a,0) , F=(1,a) et Polygone régulier(E,F,4) et désactiver l'affichage de poly2 et de A, D, H. Définir Polygone(BEFB) , Polygone(CGFC) et colorier poly3 et poly4 dans la même couleur vert foncé opacité 50 (par exemple). Définir le Curseur(angle,θ,[0°;90°], pas=1). Saisie A_1=Rotation[A,-θ,E] , H_1=Rotation[H,-θ,E] , D_2=Rotation[D,θ,G] , H_2=Rotation[H,θ,G]. Définir Polygone(EA_1H_1E) , Polygone(GD_2H_2G) et colorier poly5 et poly6 dans la même couleur vert foncé opacité 50. Pour une question de séparation, saisie I=(a,a) , J=(a*cos(θ),a) et l=segment[IJ] colorié en vert et pointillé.

Il ne reste plus qu'à désactiver tous les affichages inutiles et à écrire a , b , c aux bons endroits (avec Insérer Texte).

LES NOMBRES ETUDIES PAR LES PYTHAGORICIENS

« Un mérite de Pythagore est d'avoir élevé l'arithmétique au-dessus des besoins des marchands. Il a transformé un ensemble de recettes empiriques utilitaires en une science démonstrative. »

Aristoxène

Pour les pythagoriciens, « tout est nombre », tout est basé sur les nombres; comprendre les nombres c'est comprendre l'essence de l'univers et se rapprocher ainsi des dieux.

1. Nombres triangulaires

Un nombre est dit triangulaire si il est de la forme $t_n = 1+2+...+n$.

a) $t_n = n(n+1)/2$

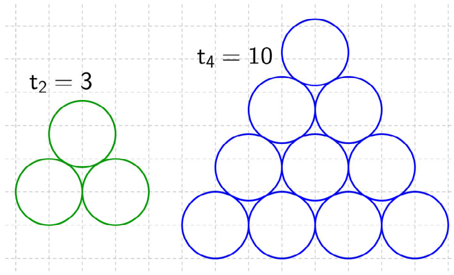
p : (à partir de la première) penser au petit Gauss (10 ans)

b) $1+9+9^2+...+9^n = t_{(3^n-1)/2}$

p : par récurrence.

c) Si t_n est un nombre triangulaire, la somme des nombres intérieurs au tringle est le nombre triangulaire t_{n-3} et la somme des nombres périphériques est $3(n-1)$.

p: A faire.



2. Nombres parfaits

Un nombre est parfait s'il est égal à la somme de ses diviseurs propres.

Exemple: 6 est parfait car 6 = 1+2+3

Le deuxième nombre parfait est 28 (à montrer).

a) Les nombres parfaits sont très rares et les pythagoriciens n'en ont peut-être trouvé que les deux ou trois premiers. Le troisième nombre parfait est 496. On saute ensuite à 8128 puis 33 550 336 !

b) On connaît actuellement (avec les ordinateurs) moins d'une cinquantaine de nombres parfaits; les plus grands ayant des milliards de chiffres!

3. Triplets pythagoriciens

Le triplet (a,b,c) est pythagoricien si $a^2 + b^2 = c^2$.

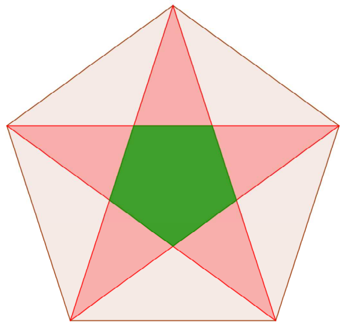
a) Les triplets (3,4,5) , (8,15,17) , (5,12,13) , (12,35,17) , ... sont pythagoriciens.

b) Si (a,b,c) est pythagoricien alors pour tout k entier, (ka,kb,kc) est pythagoricien.

c) Les triplets pythagoriciens ont donné à Fermat l'idée de chercher des triplets pouvant vérifiant pour, $n > 2$, l'égalité $a^n + b^n = c^n$ (Théorème de Fermat).

4. Le Pentacle ou Pentagramme

Les pythagoriciens se sont intéressés aux polygones réguliers (plan) et même aux polyèdres réguliers (espace). Leur signe était le pentagramme ou pentacle.



Construction: Avec Geogebra, on commence par agrandir les unités, puis on place un point *A=(0,1)*. On définit dans la zone de saisie *B=Rotation[A,2*pi/5]*. On obtient le pentagone régulier avec *Polygone régulier(A,B,5)*. L'étoile s'obtient avec *Polygone(ACEBDA)* qu'on peut colorier (poy2) par exemple en rouge avec opacité50. On trace ensuite le pentagone interne et on le colorie en vert par exemple. Il suffit après dans la conne gauche, de sélectionner tous les points pour ne pas les afficher et toutes les éventuelles étiquettes pour les enlever afin d'avoir une figure propre.

PYTHAGORE. Le peuple veut des Dieux, qu'il puisse voir et palper, entendre et sentir. L'hiérophante peut donner la main au profane vulgaire. Le secret des initiations n'est peut-être qu'un mot pour un autre.

L'HIÉROPHANTE. Ah, toutes les sectes, toutes les factions et les guerres, qui s'en suivent sont-elles autre chose que des disputes de mots? Les hommes sont divisés de culte et de système politique, parce qu'ils ne s'entendent pas. Mais jusqu'à ce que cette mésintelligence universelle d'opinions ait cessé , il faudra deux doctrines. Il ne sera pas permis ni prudent de dire tout haut sur la place publique ce que je te répète ici à mi-voix et dans la profondeur du temple.
Les Dieux ne sont que les vertus de la Nature répandues dans les astres, dans les plantes, dans tous les corps qui la composent. Tous les êtres sont physiques; il n'en est aucun d'immatériel. Tout est soumis aux lois de la nécessité, chaîne indestructible qui lie le grand tout.
Zeus, le Dieu de notre Diospolis , n'est que le Soleil , ou plutôt, l'âme du monde, ou mieux encore, le monde, 1'univers lui-même, l'existence de tous les êtres... Cela seul est la divinité qui compose le ciel et la terre, l'universalité des choses, la nature enfin. Dieu est tout. Pythagore es-tu satisfait ?

PYTHAGORE. Non, sage hiérophante. Je ne le serai que quand ces grandes vérités ne seront plus des secrets.

L'HIÉROPHANTE. Ton vœu est précoce: le peuple, a besoin qu'on le trompe. On ne peut agir autrement avec lui... On ne gagne sa confiance qu'à l'aide du merveilleux.

PYTHAGORE. Si cela est ainsi, jamais je ne me rangerai au nombre de ceux qui veulent le gagner. Je l'abandonnerai plutôt à lui-même.

L'HIÉROPHANTE. Et il finira par te dévorer.

PYTHAGORE., Quoi! le langage de la raison, dégagé de toutes vos circonlocutions mythologiques, ne serait point à la portée de la multitude ? ...

L'HIÉROPHANTE. Il y a plus: livre la vérité au peuple; demain elle sera méconnaissable à tes propres yeux. L'histoire primitive ne l'a que trop prouvé. Nos premiers ancêtres, s'il faut en croire la tradition, étaient à ce point où tu regrettes de ne plus trouver les hommes. Pourquoi n'y sont-ils pas restés ? Les y rappeler, ce serait recommencer à parcourir un cercle vicieux. Et nos mystères n'ont été institués que pour accueillir la vérité, lui donner un asile, et la sauver du naufrage. Sans nous, elle n'aurait pas sur toute la terre un seul endroit où pouvoir reposer sa tête. Insultée dans les carrefours, cette fille céleste n'a d'autres ressources que de voyager la nuit, couverte d'un triple voile, et de se cacher dans les déserts ou sous la voûte de nos temples souterrains.

Voyages de Pythagore, *§ LXXVIII , Egypte*
Pierre-Sylvain Maréchal