Probabilités

Ibrahim Keita

I. INTRODUCTION

1. Evènements

Tout se passe dans un *univers* qui est l'ensemble des *évènements* résultants d'une *expérience aléatoire*. Le contraire de l'évènement E est noté $\overline{E}$ un évènement impossible est noté Ø .

Exemple. Lancer d'un dé. Comme évènements on peut citer A = « avoir 2 ou 4 » , B = « avoir un nombre pair ». C = « avoir 1 » , D = « avoir 2 » sont des évènements élémentaires.

2. Probabilité

▪ La probabilité *P(A)* d'un évènement A est nombre réel tel que $P(A) \in [0 \ ; \ 1]$, $P(\phi) = 0$ et $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

▪ Pour tous évènements A et B, {A ou B} est noté $A \cup B$, {A et B} est noté $A \cap B$, on a :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$ (Axiome des probabilités totales).

▪ Pour tous évènements A et B indépendants :

$$P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$$ (Axiome d'indépendance).

▪ Dans le cas où tous les évènements élémentaires sont équiprobables, on a :

$$P(A) = \frac{nombre \ de \ cas \ favorables}{nombre \ de \ cas \ possibles}$$ (Axiome d'équiprobabilité).

Exemple. Lancer d'un dé. A = « avoir 2 ou 4 » , B = « avoir un nombre pair », C = « avoir 1 » , D = « avoir 2 ».

P(C)=1/6 , *P(A)=2/6* , *P(B)=3/6* .

▪ La probabilité conditionnelle de A sachant B , notée *P(A/B)*, est la probabilité que A se réalise sachant que B est déjà réalisé :

$$P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$ (Axiome des probabilités conditionnelles).

Exemple. Lancer d'un dé. A= « avoir 2 ou 4 » , B= « avoir un nombre pair », C= « avoir 1 » , D= « avoir 2 ».

P(D/A)=1/2 directement ou bien $P(D/A)=P(D \cap A)/P(A)=(1/6)/(2/6)=1/2$.

3. Tirages

a) Avec remise.

Si on tire avec remise, par exemple trois boules dans une urne contenant 6 boules, le nombre de cas possibles est 6x6x6 = 216.

b) Sans remise.

Si on tire sans remise, par exemple trois boules dans une urne contenant 6 boules, le nombre de cas possibles est 6x5x4 = 120.

4. Combinatoire

a) Combinaison

Le nombre de façons de choisir k objets parmi n, sans ordre, est : $C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ où $n! = n(n-1)...2.1$

Exemple. Combien y-a-t-il de façons de choisir 4 délégués dans une classe de 20 élèves ?

Réponse : $C_{20}^4 = \dfrac{20!}{4!\times 16!}$ = *4845* possibilités (avec la TI83plus.fr: **20 math PRB nCr entrer 4 entrer**).

b) Arrangement

Le nombre de façons de choisir k objets parmi n, avec ordre, est : $A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$.

Exemple. Combien y-a-t-il de podiums possibles (1^{er}, 2^{e}, 3^{e}) dans la finale olympique du 100 m ?

Réponse : $A_8^3 = \dfrac{8!}{5!}$ = *336* possibilités (en supposant que toutes les arrivées sont possibles !).

(avec la TI83plus.fr: **8 math PRB nPr entrer 3 entrer**).

II. LOIS DISCRETES

1. Généralités

a) Variable aléatoire

Une variable aléatoire est une fonction qui, à un événement, associe un réel.

Exemples. ▪ Lancer d'un dé. X = "numéro de la face obtenue" est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6. On écrit : $X \in \{1;2;3;4;5;6\}$.

▪ Lancer d'un dé deux fois (ou de deux dés). Y = "somme des faces obtenues" est une variable aléatoire qui peut prendre les valeurs 2 ; .. ; 11 ; 12. On écrit : $Y \in \{2;3;...;11;12\}$.

b) Loi d'une variable aléatoire

Déterminer la loi de *X*, c'est calculer *P*(X=k) , $\forall k$.

Exemples. ▪ Lancer d'un dé. *X* = "numéro de la face obtenue". *P*(X=k) = 1/6 , $\forall k$.

▪ Lancer d'un dé deux fois (ou de deux dés). *Y* = "somme des faces obtenues".

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
P(Y)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1

Car il y a 6x6=36 cas possibles et , par exemple pour *Y*=5, les cas favorables sont (1 ; 4), (2 ; 3), (3 ; 2), (4 ; 1).

c) Espérance et variance

L'espérance mathématique *E(X)* de la variable aléatoire X est $E(X) = \sum_i p_i x_i = \sum_i iP(X=i)$.

C'est la valeur moyenne de X .

La variance *V(X)* de la variable aléatoire *X* est $V(X)=\sum_i p_i x_i^2-\left(\sum_i p_i x_i\right)^2 = E\left(X^2\right)-\left(E(X)\right)^2$.

La variance traduit la dispersion des valeurs de *X* ; plus elle est élevée, plus la série est dispersée.

On utilise parfois l'écart-type défini par: $\sigma = \sqrt{V(X)}$.

Exemple. Lancer d'un dé deux fois (ou de deux dés). *Y*=somme des faces obtenues.

Y	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	Total
P(Y)	1/36	2/36	3/36	4/36	5/36	6/36	5/36	4/36	3/36	2/36	1/36	1
YP(Y)	2/36	6/36	12/36	20/36	30/36	42/36	40/36	36/36	30/36	22/36	12/36	252/36
Y²P(Y)	4/36	18/36	48/36	100/36	180/36	294/36	320/36	324/36	300/36	242/36	144/36	1974/36

E(Y) = 252/36 = 7

V(Y) = 1974/36 – (252/36)² = 1673/324 ≈ 5,83 .

d) Changement de variable

Si on définit à partir de la variable aléatoire *X* une nouvelle variable aléatoire *Y*= *a X*+*b*, alors on aura :

E(Y) = a E(X)+b et *X(X) = a² V(X)* .

e) Somme de variables aléatoires

Si *X* et *Y* sont deux variables aléatoires à partir desquelles on peut définir une nouvelle variable *X+Y* , alors *E(X+Y) = E(X)+E(Y)* et si *X* et *Y* sont indépendantes *V(X+Y) = V(X)+V(Y)* .

2. Loi binomiale

a) Définition

On répète une expérience *n* fois. Les résultats successifs sont indépendants. Il y a, chaque fois, seulement deux possibilités : succès (avec la probabilité *p*) ou échec (avec la probabilité *1-p*). Si on définit la variable aléatoire *X* = « nombre de succès en *n* coups », alors :

X suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p* ; ce qui signifie que $P(X=k)=C_n^k\, p^k\,(1-p)^{n-k}$

pour tout entier *k* compris entre 0 et *n* . Avec la TI83plus.fr: **distrib binompdf(*n* , *p* , *k*) entrer** .

On note souvent : *X* ⤻ *B(n ; p)* .

Exemple. Lancer d'un dé 10 fois de suite. *Z* = nombre de fois où on obtient six.

On est ici dans le schéma binomial et p = 1/6.

Donc *Z* ⤻ *B(10 ; 1/6)*. On a, par exemple :

$P(Z=2)=C_{10}^2(1/6)^2(1-1/6)^{10-2}$ = 45(1/36)(5/6)^8 ≈ 0,29 ≈ 29% (**distrib binompdf(*10,1/6,2*)**).

b) Propriétés

Si *X* suit la loi binomiale de paramètres *n* et *p* , alors :

E(X) = np et *V(X) = np(1-p)* .

Exemple. Dans l'exemple précédent :

E(X) = (10)(1/6) = 10/6 = 5/3 ≈ 1,67 et *V(X)* = (10)(1/6)(5/6) = 50/36 ≈ 1,39 .

3. Loi de Poisson

a) Définition

La loi de Poisson (*en hommage à Siméon Denis Poisson, mathématicien français du 19e siècle*) est la loi des phénomènes rares (nombre de suicides par an dans un quartier, nombre d'accidents de la route par mois sur le boulevard Sérurier,…).

X suit la loi de Poisson de paramètre λ si $P(X=k)=e^{-\lambda}.\lambda^k/k!$ pour tout entier k supérieur ou égal à 0.

Avec la TI83plus.fr: **distrib poissonpdf(λ , k) entrer** .

On note souvent : $X \hookrightarrow \mathscr{P}(\lambda)$.

Exemple. Soit X = nombre d'accidents dans ma rue par an.

Supposons que X suive, par exemple, la loi de Poisson de paramètre $\lambda = 4$, on a, alors :

$P(X=2)=e^{-4}4^2/2! \approx 0{,}15 \approx 15\%$ (**distrib poissonpdf(4,2)**) (Il y a 15% de chance qu'il y ait exactement 2 accidents dans ma rue sur une année donnée).

b) Propriétés

Si X suit la loi Poisson de paramètre λ, alors :

$E(X) = \lambda$ et $V(X) = \lambda$.

Exemple. Dans l'exemple précédent :

$E(X) = 4$ (En moyenne il y a 4 accidents par an dans ma rue) .

4. Approximation de la loi binomiale

Pour faciliter les calculs, on est parfois amené à faire un calcul approché d'une loi binomiale à l'aide de la loi de Poisson.

Si n est grand ($n \geq 50$) et p petit ($p \leq 0{,}1$ avec $np \leq 10$) on peut approximer la loi binomiale $B(n\,;p)$ par la loi de Poisson de paramètre np, c'est-à-dire $\mathscr{P}(np)$.

Exemple. La loi binomiale de paramètres $n = 50$ et $p = 0{,}04$ par exemple, peut être approximée par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = (50)(.04) = 2$ comme on peut le constater en calculant $P(X=0), P(X=1), P(X=2),\ldots$

en utilisant l'une et l'autre de ces deux lois.

III. LOIS CONTINUES

1. Généralités

a) Variable aléatoire continue

▪ Pour définir la loi de probabilité d'une variable aléatoire continue on introduit la notion de densité. La fonction f est une densité si

$$f \geq 0 \quad \text{et} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1$$

▪ Si f est la fonction de densité de la variable aléatoire X , la loi de probabilité est définie par

$$P(X \le b) = \int_{-\infty}^{b} f(x)dx \qquad \text{et} \qquad P(a \le X \le b) = \int_{a}^{b} f(x)dx \ .$$

▪ On appelle fonction de répartition F de f la fonction définie par

$$F(u) = P(X \le u) = \int_{-\infty}^{u} f(x)dx \ .$$

On a alors : $P(X \le b) = F(b)$ et $P(a \le X \le b) = F(b) - F(a)$.

Exemple. Soit X la variable aléatoire de densité f telle que $f(x) = -x/2+1$ si $0 \le x \le 2$ et 0 sinon.

On a : $F(u) = 0$ pour $u < 0$, $F(u) = -u^2/4+u$ pour $0 \le u \le 2$, $F(u) = 1$ pour $u > 2$ (à montrer).

D'où : $P(X \le 0) = 0$, $P(X \le 1) = 1\text{-}1/4 = 3/4$; $P(X < 2) = 2\text{-}4/4 = 1$; $P(1 \le X \le 2) = 1 - 3/4 = 1/4$.

b) Espérance et variance

▪ L'espérance mathématique $E(X)$ et la variance $V(X)$ de la variable aléatoire X sont :

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx \qquad \text{et} \qquad V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)dx - E(X)^2 \ .$$

▪ L'espérance mathématique et la variance ont les propriétés déjà vues pour les variables discrètes.

Exemple. Pour l'exemple précédent, montrer que : $E(X) = 2/3$ et $V(X) = (2/3) - (2/3)^2 = 2/9$.

2. Loi uniforme sur [0 ; a]

a) Définition

X suit la loi uniforme sur $[a\ ;\ b]$ si sa densité est

$$f(x) = \frac{1}{b-a} . 1_{[a\,;b]} \quad \text{c'est-à-dire} \quad f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & si \ \ x \in [a\ ;\ b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

Nous noterons: $X \rightsquigarrow \mathscr{U}_{[a\ ;\ b]}$.

b) Propriétés

▪ Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}_{[a\ ;\ b]}$, alors $E(X) = \dfrac{b+a}{2}$ et $V(X) = \dfrac{(b-a)^2}{12}$.

▪ Si $X \rightsquigarrow \mathscr{U}_{[a\ ;\ b]}$, alors les probabilités se calculent avec la fonction de répartition:

$F(x) = 0$ sur $[-\infty\ ;\ a[$, $F(x) = (x\text{-}a)/(b\text{-}a)$ sur $[a\ ;\ b]$, $F(x) = 1$ sur $]b\ ;\ +\infty[$

Exemple. Soit $X \rightsquigarrow \mathscr{U}_{[1\ ;\ 3]}$, alors, $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2} & si \ \ x \in [1\ ;\ 3] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ et on obtient $F(x) = \begin{cases} 0 & si \quad x < 1 \\ \dfrac{x-1}{2} & si \quad 1 \le x \le 3 \\ 1 & si \quad x > 3 \end{cases}$.

D'où: $P(X \le 1/2) = 0$ et $P(X > 5/3) = 1 - P(X \le 5/3) = 1 - (5/3\text{-}1)/2 = 1 - 1/3 = 2/3 \approx 0{,}67$.

3. Loi exponentielle de paramètre λ

a) Définition

X suit la loi exponentielle de paramètre λ si sa densité est $f(x)=\lambda e^{-\lambda x}.1_{(x\geq 0)}$ ou $f(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x<0\\ \lambda e^{-\lambda x} & si\ \ x\geq 0\end{cases}$.

Nous noterons: $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$

b) Propriétés

▪ Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors $E(X) = 1/\lambda$ et $V(X) = 1/\lambda^2$.

▪ Si $X \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, alors les probabilités se calculent avec la fonction de répartition $F(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x<0\\ 1-e^{-\lambda x} & si\ \ x\geq 0\end{cases}$

Exemple. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{E}(1/2)$, alors, on obtient : $F(x) = 1 - e^{-x/2}$ pour $x \geq 0$.

On a alors: $P(X < 0) = 0$ et $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - (1 - e^{-1/2}) = e^{-1/2} \approx 0{,}61$.

4. Loi normale

a) Définition

X suit la loi normale (ou loi de Laplace-Gauss *en hommage à Carl Friedrich Gauss mathématicien allemand du 19e siècle surnommé "Le prince des mathématiciens"*) de paramètres m et σ si sa densité est

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2\right)$$

(fonction donnée ici à titre informatif et n'intervenant pas dans nos calculs)

On note souvent : $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m\ ;\ \sigma)$.

b) Propriétés

▪ Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m\ ;\ \sigma)$, alors $E(X) = m$ et $V(X) = \sigma^2$.

▪ Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m\ ;\ \sigma)$, alors $P(m-1.65\sigma \leq X \leq m+1.65\sigma) = 0.90$,

$P(m-1.96\sigma \leq X \leq m+1.96\sigma) = 0.95$, $P(m-2.58\sigma \leq X \leq m+2.58\sigma) = 0.99$

▪ Si $X \hookrightarrow \mathcal{N}(m\ ;\sigma)$, alors les probabilités se calculent avec la calculatrice, un tableur ou un logiciel de calcul.

Exemple. Soit $X \hookrightarrow \mathcal{N}(160\ ;\ 30)$, alors, avec la TI 83 plus.fr , par exemple, on obtient :

$P(X \geq 170) = 1 - P(X < 170) \approx 1 - 0{,}6293 \approx 0{,}37$ avec la séquence **distrib normalcdf((-)100,170,160,30)** .

5. Approximations de lois

Afin de faciliter les calculs, on peut approximer:

▪ si n est grand et p petit, la loi binomiale $B(n;p)$ par la loi normale de paramètres $m = np$ et $\sigma = \sqrt{np(1-p)}$;

▪ si $\lambda > 10$, la loi de Poisson de paramètre λ par la loi normale de paramètres $m = \lambda$ et $\sigma = \sqrt{\lambda}$.