Modélisation géométrique

Ibrahim Keita

Les courbes géométriques sont utilisées dans l'industrie (aéronautique, automobile, navale,…) pour modéliser des formes.

I. COURBE DE BEZIER

1. Polynôme de Bernstein

Pour un entier naturel n donné, les $(n+1)$ polynômes de Bernstein, de degré n, sont définis par $B_{i,n}(t) = C_n^i\, t^i\, (1-t)^{n-i}$.

Exemple. Pour n=3, les 4 polynômes de Bernstein sont

$B_{0,3}(t) = 1.t^0.(1-t)^3 = -t^3+3t^2-3t+1$, $B_{1,3}(t) = 3.t^1.(1-t)^2 = 3t^3-6t^2+3t$. Déterminer $B_{2,3}(t)$ et $B_{3,3}(t)$.

2. Courbe de Bézier

▪ La courbe de Bézier Γ associée à $(n+1)$ points de définition $P_0, P_1, \ldots, P_n$ (ou aux $(n+1)$ vecteurs $\vec{V_0}$, $\vec{V_1}$, … , $\vec{Vn}$) a pour représentation paramétrique $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{OP_i}$, $t \in [0\ ;\ 1]$.

▪ Les $(n+1)$ points de définition P_i vérifient $\overrightarrow{OP_0} = \vec{V_0}$ et $\overrightarrow{P_{i-1}P_i} = \vec{V_i}$ pour $1 \le i \le n$.

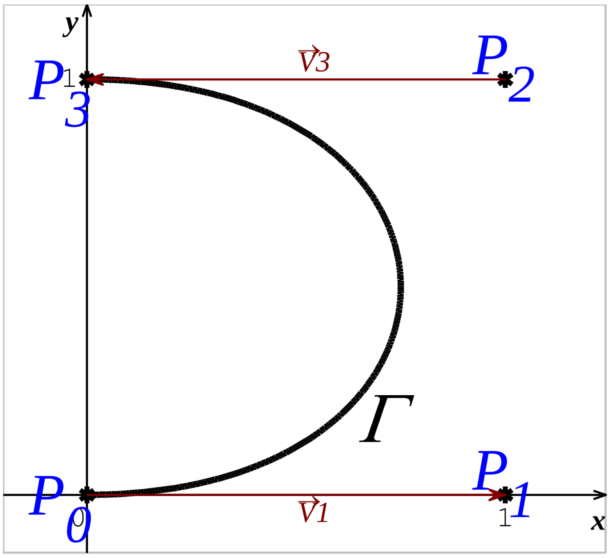
▪ Γ a pour extrémités P_0 et P_n , $\overrightarrow{P_0P_1} = \vec{V_1}$ est un vecteur directeur de la tangente en P_0 et $\overrightarrow{P_{n-1}P_n} = \vec{V_n}$ est un vecteur directeur de la tangente en P_n .

Exemple. Construire la courbe de Bézier Γ associée aux 4 points de définition $P_0(0\ ;0)$, $P_1(1\ ;0)$, $P_2(1\ ;1)$ et $P_3(0\ ;1)$.

En posant $\overrightarrow{OM}(t) = \sum_{i=0}^{n} B_{i,n}(t)\overrightarrow{OP_i} = \begin{vmatrix} x(t) \\ y(t) \end{vmatrix}$, on obtient la représentation paramétrique de Γ $\begin{cases} x(t) = -3t^2+3t \\ y(t) = -2t^3+3t^2 \end{cases}$.

L'étude de cette courbe pour $t \in [0\ ;\ 1]$, donne le tableau de variations et la représentation suivants :

t	0		1/2		1
$x'(t)$	0	+	0	-	
$x(t)$	0	↗	3/4	↘	0
$y(t)$	0	↗	1/2	↗	1
$y'(t)$	0		+		1



3.Barycentres

La courbe de Bézier Γ est aussi l'ensemble des barycentres des $(n+1)$ points de définition P_i affectés des masses $B_{i,n}(t)$ quand t décrit le segment $[0\ ;\ 1]$.

II. COURBE B-SPLINE

Etant donnés n points de définition P_i on veut construire une courbe composée de deux courbes parfaitement reliées.

Nous exposerons le problème ici dans le cas de quatre points : P_0 , P_1 , P_2 et P_3 .

Polynôme de Riesenfeld

Les trois polynômes de Riesenfeld , de degré 2 , sont définis par

$$R_i(t) = 3\sum_{j=0}^{2-i}(-1)^j \frac{(t+2-i-j)^2}{j!(3-j)!}.$$

Exemple. Pour n=3, les 4 polynômes de Riesenfeld sont

$R_0(t) = 3.((t+2)^2/(1.6)-(t+1)^2/(1.2)+t^2/(2.1)) = 3((t^2+4t+4)/6-(t^2+2t+1)/2+t^2/2) = t^2/2-t+1/2$. De la même façon (à faire), on a $R_1(t) = -t^2+t+1/2$ et $R_2(t) = t^2/2$.

2. Courbe B-spline

La courbe B-spline Γ associée à 4 points de définition P_0 , P_1 , P_2 et P_3 est l'ensemble des deux arcs de courbe $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$ définis par :

$\mathscr{C}_1 = \{M_1(t),\ \ t\in [0\ ;\ 1]\}$ tel que $\overrightarrow{OM_1}(t) = R_0(t)\overrightarrow{OP_0} + R_1(t)\overrightarrow{OP_1} + R_2(t)\overrightarrow{OP_2}$

$\mathscr{C}_2 = \{M_2(t),\ \ t\in [0\ ;\ 1]\}$ tel que $\overrightarrow{OM_2}(t) = R_0(t)\overrightarrow{OP_1} + R_1(t)\overrightarrow{OP_2} + R_2(t)\overrightarrow{OP_3}$.

Exemple. Construire la courbe de B-spline associée aux 4 points de définition $P_0(-1;2)$, $P_1(0;-3)$, $P_2(3;2)$ et $P_3(-3;4)$.

A l'aide des polynômes de Riesenfeld calculés avant, on détermine les vecteurs $\overrightarrow{OM_1}(t)$ et $\overrightarrow{OM_2}(t)$ donc les équations des courbes $\mathscr{C}_1$ et $\mathscr{C}_2$. On trouve ainsi $\mathscr{C}_1\begin{cases} x_1(t) = t^2 + t - 1/2 \\ y_1(t) = 5t^2 - 5t - 1/2 \end{cases}$ et $\mathscr{C}_2\begin{cases} x_2(t) = -9/2t^2 + 3t + 3/2 \\ y_2(t) = -3/2t^2 + 5t - 1/2 \end{cases}$.

L'étude de ces courbes pour $t \in [0\ ;\ 1]$, donne le tableau de variations de $\mathscr{C}_1$ (à faire pour $\mathscr{C}_2$) et la représentation suivants :

t	0		1/2		1
$x_1'(t)$	1	+	2	+	3
$x_1(t)$	-1/2	↗	1/4	↗	3/2
$y_1(t)$	-1/2	↘	-7/4	↗	-1/2
$y_1'(t)$	-5	-	0	+	1