MATRICES

Ibrahim Keita

I. INTRODUCTION

1. Exemple

Trois ateliers de confection C_1 , C_2 , C_3 fabriquent deux types de produits H_1 et H_2 . L'atelier C_1 fabrique 3 produits H_1 et 2 produits H_2 , C_2 fabrique 1 produit H_1 et 4 produits H_2 et C_3 fabrique 2 produits H_1 et 1 produit H_2 .

Ces données peuvent être résumées dans le tableau

$M = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ encore appelé matrice à 2 lignes et 3 colonnes.

2. Définitions

▪ Une matrice A est un tableau à n lignes et p colonnes. On dit que A est une matrice np.

L'élément de la i^e ligne et de la j^e colonne est noté a_{ij} . On note parfois $A=(a_{ij})$.

▪ Deux matrices A et B sont égales si elles ont mêmes nombres de lignes et de colonnes et si tous leurs éléments sont égaux.

▪ Une matrice carrée est une matrice nn. Une matrice ligne est une matrice 1n. Une matrice colonne est une matrice n1. Une matrice nulle est une matrice dont tous les éléments sont nuls.

II. OPERATIONS

1. Multiplication par un réel

$\lambda A=(\lambda a_{ij})$; tous les éléments sont multipliés par λ.

2. Somme

a) Si les matrices A et B sont de mêmes dimensions, et seulement dans ce cas, alors on peut définir leur somme

$A+B=(a_{ij} + b_{ij})$; on additionne les éléments correspondants entre eux.

b) La somme est associative (A+(B+C) = (A+b)+C) et commutative (A+B = B+A).

2. Produit matriciel

a) Si A est une matrice np et B une matrice pq , alors on peut multiplier A par B (il faut que la dimension finale de la première matrice soit égale à la dimension initiale de la deuxième matrice) et le produit C=AxB est une matrice nq.

Exemple : Effectuer le produit AxB sachant que

$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}$. On aura $C = A \times B = \begin{pmatrix} 0 & 7 & 3 \\ -2 & -1 & 1 \\ 3 & 12 & 3 \end{pmatrix}$

c_{11} s'obtient en multipliant la première colonne de B par la première ligne de A : $c_{11} = A_{1\blacksquare} \times B_{\blacksquare 1} = 1\times 2 + 2\times -1 = 0$.

$c_{21} = A_{2\blacksquare} \times B_{\blacksquare 1} = -1\times 2 + 0\times -1 = -2$, $c_{31} = A_{3\blacksquare} \times B_{\blacksquare 1} = 3\times 2 + 3\times -1 = 3$, $c_{12} = A_{1\blacksquare} \times B_{\blacksquare 2} = 1\times 1 + 2\times 3 = 7$ ...

b) Le produit matriciel est associatif mais n'est pas commutatif (AxB peut être différente de BxA).

3. Matrice unité d'ordre n

Par exemple, pour n=3 , on a :

si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ alors $A \times B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

C'est l'équivalent de $a \times a^{-1} = 1$ pour les nombres réels. C'est pourquoi :

- la matrice B est appelée matrice inverse de A et notée A^{-1} .
- la matrice I_3 (les éléments diagonaux valent 1 et tous les autres éléments sont nuls) est appelée matrice identité d'ordre 3 ; et, pour toute matrice carrée M d'ordre 3, on a $M \times I_3 = I_3 \times M = M$.