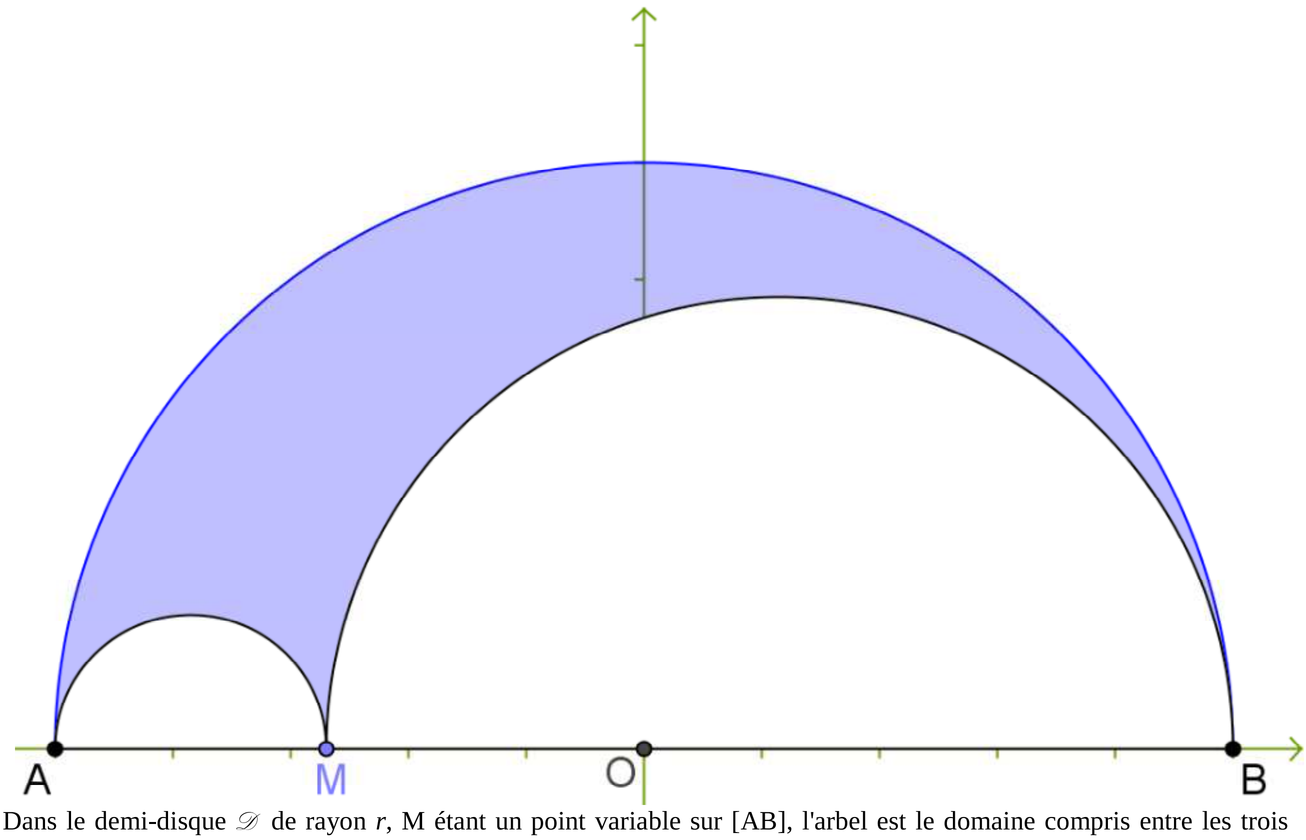
Je m'envole avec l'arbel

Dans le plan ... et dans l'espace ?

I. DANS LE PLAN

1. Définition



Dans le demi-disque $\mathscr{D}$ de rayon r, M étant un point variable sur [AB], l'arbel est le domaine compris entre les trois demi-cercles de diamètres [AB], [AM] et [MB] (colorié sur la figure).

2. Périmètre

Le périmètre de l'arbel est indépendant de la position de M et vaut $\boxed{p = 2\pi r}$.

p: Notons x l'abscisse de M et $\overset{\frown}{AM}$ la longueur du demi-cercle de diamètre [AM].

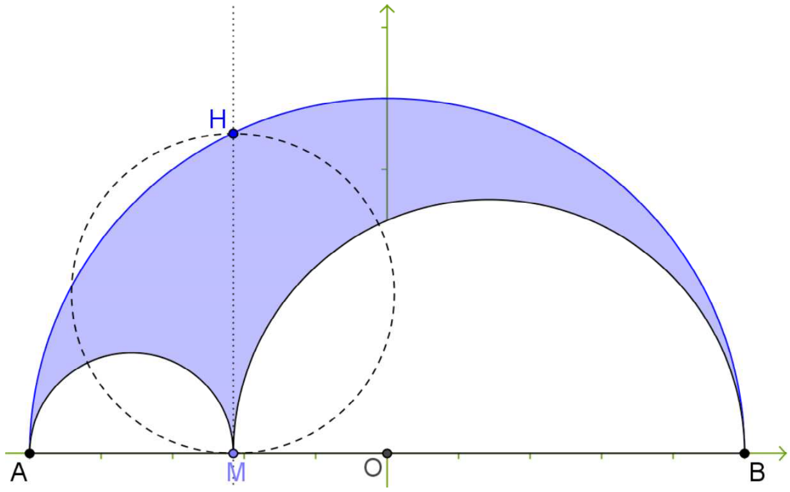
$x \in [-r\ ;\ r]$,

$AM = x - (-r) = r + x$, $MB = r - x$.

Donc:

$\overset{\frown}{AB} = \frac{1}{2} 2\pi r = \pi r$, $\overset{\frown}{AM} = \frac{1}{2} 2\pi * \frac{r+x}{2} = \frac{\pi}{2}(r + x)$, ...

3. Aire



a) Si H est le point d'intersection de la perpendiculaire en M à (AB) avec le demi-cercle de diamètre [AB] et Γ le disque de diamètre [MH] ; alors l'aire de l'arbel vaut $\boxed{A = Aire(\Gamma) = \frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)}$.

p: * Dans le repère de centre O, M(x;0) , d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMH on a

${y_H}^2 + x^2 = r^2$, donc $Aire(\Gamma) = \pi \left(\frac{y_H}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(y_H)^2 = \frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)$

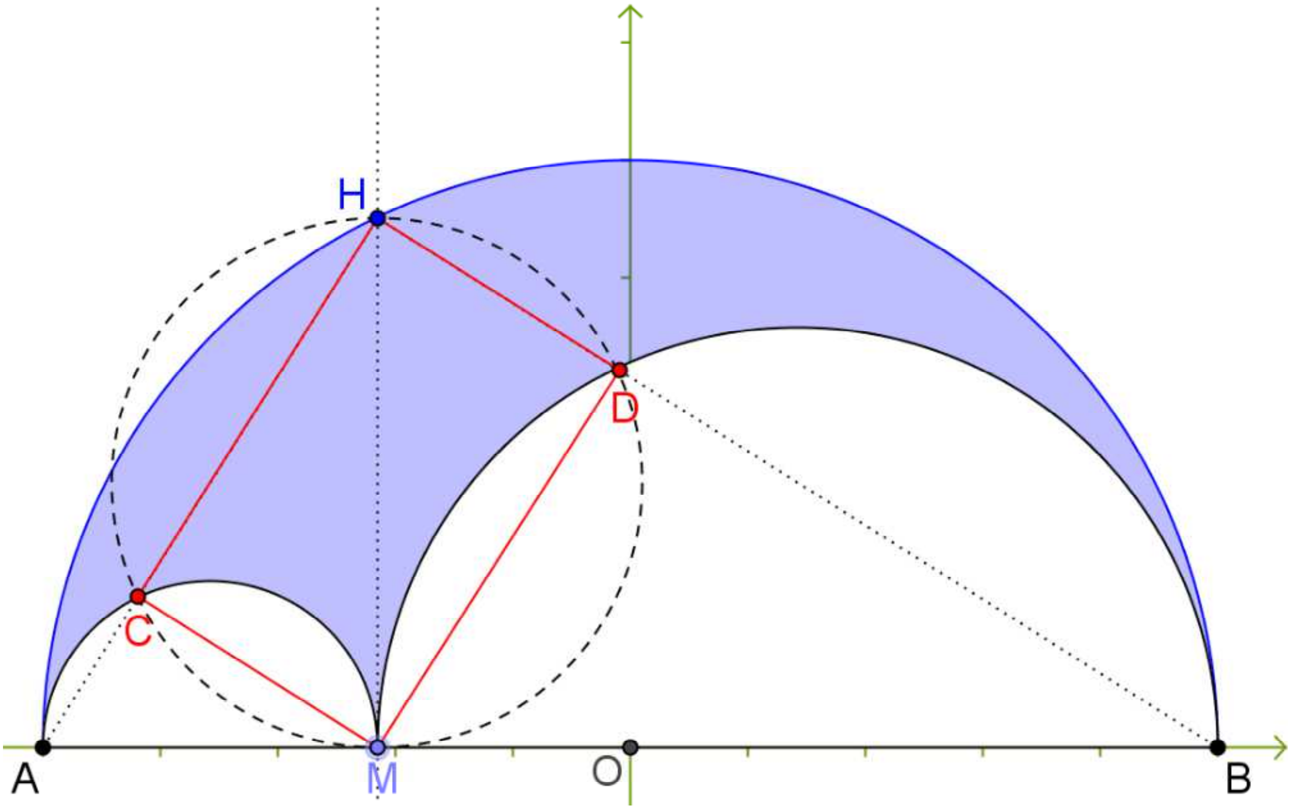
* D'autre part, l'aire de l'arbel vaut

$A = \frac{1}{2}\pi r^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r+x}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}\left(2r^2 - \frac{1}{2}(r+x)^2 - \frac{1}{2}(r-x)^2\right)$ qu'il suffit de développer pour trouver le résultat.

b) L'aire de l'arbel est maximale quand M est en O et cette aire maximale représente la moitié de l'aire du demi-disque de diamètre [AB] .

p: Il suffit de chercher le maximum de la fonction $\frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)$ sur $[-r \; ; \; r]$.

4. Quadrilatère de l'arbel



C et D étant les points d'intersection de [HA] et [HB] avec les cercles intérieurs, le quadrilatère MCHD est un rectangle (quadrilatère de l'arbel).

p: Par le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle, les angles en H , C et D valent ...

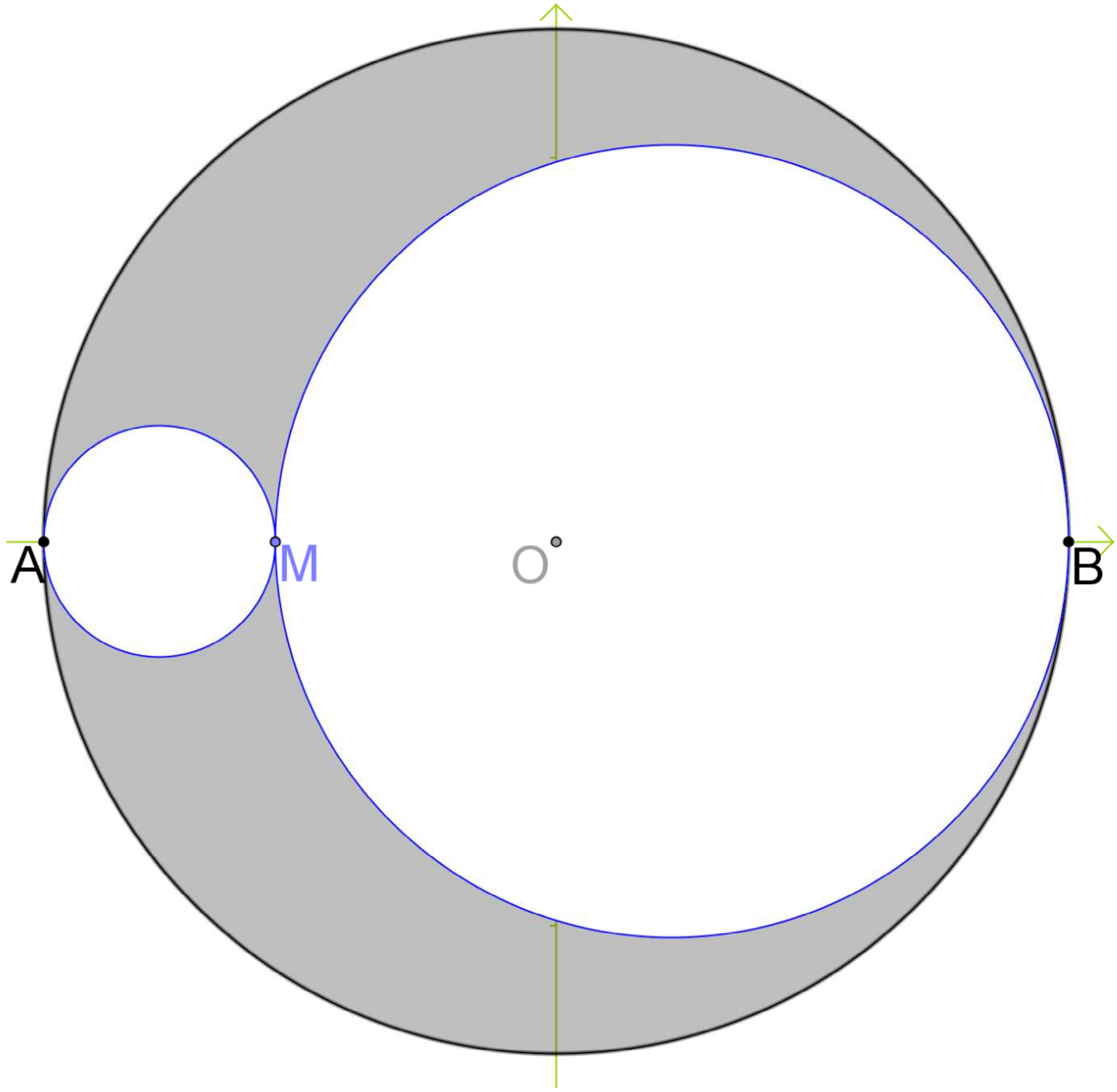
II. DANS L'ESPACE

1. Définition

Pour généraliser à l'espace, nous considérons les points A($-r$,0,0) et, B(r,0,0) , $\mathscr{B}$ est la demi-boule supérieure de diamètre [AB].

L'arbel sera le domaine compris entre les trois demi-sphères de diamètres [AM] , [MB] , [AB] et par le plan xOy.

La figure suivante représente une vue de haut (sur le plan xOy).



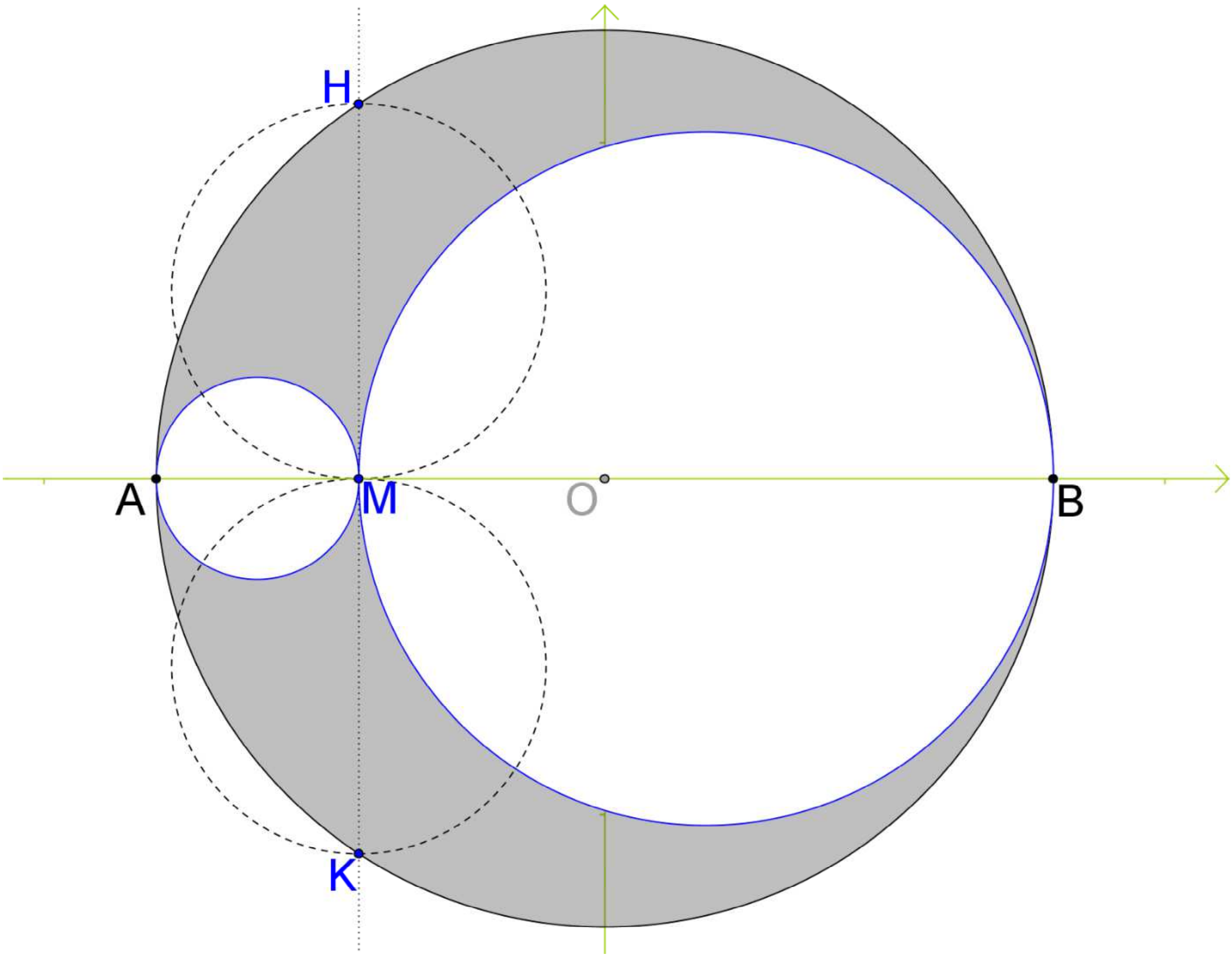
2. Périmètre

Le périmètre défini par l'arbel sur le plan xOy est constant et vaut $\boxed{p = 4\pi r}$

p: Ce périmètre et égal à la somme des périmètres des trois cercles de diamètres [AM] , [MB] et [AB]. Si [OB) est la demi-droite [Ox), et M(x;0;0) on a donc

$p = 2\pi r + 2\pi\frac{x+r}{2} + 2\pi\frac{r-x}{2} = \pi(2r + x + r + r - x)$.

3. Aire



a) Si H et K sont les points d'intersection de la perpendiculaire en M à (AB) avec le cercle de diamètre [AB] dans xOy et Γ le disque de rayon [MH] ; alors l'aire de la "surface au sol" de l'arbel (aire sur le plan xOy) vaut $\boxed{A = 2 * Aire(\Gamma) = \frac{\pi}{2}(r^2 - x^2)}$ (ou somme des aires des deux disques de diamètre [MH] et [MK]).

p: * Dans le plan xOy, M(x;0) , d'après le théorème de Pythagore dans le triangle OMH on a

${y_H}^2 + x^2 = r^2$, donc $Aire(\Gamma) = \pi\left(\frac{y_H}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(y_H)^2 = \frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)$

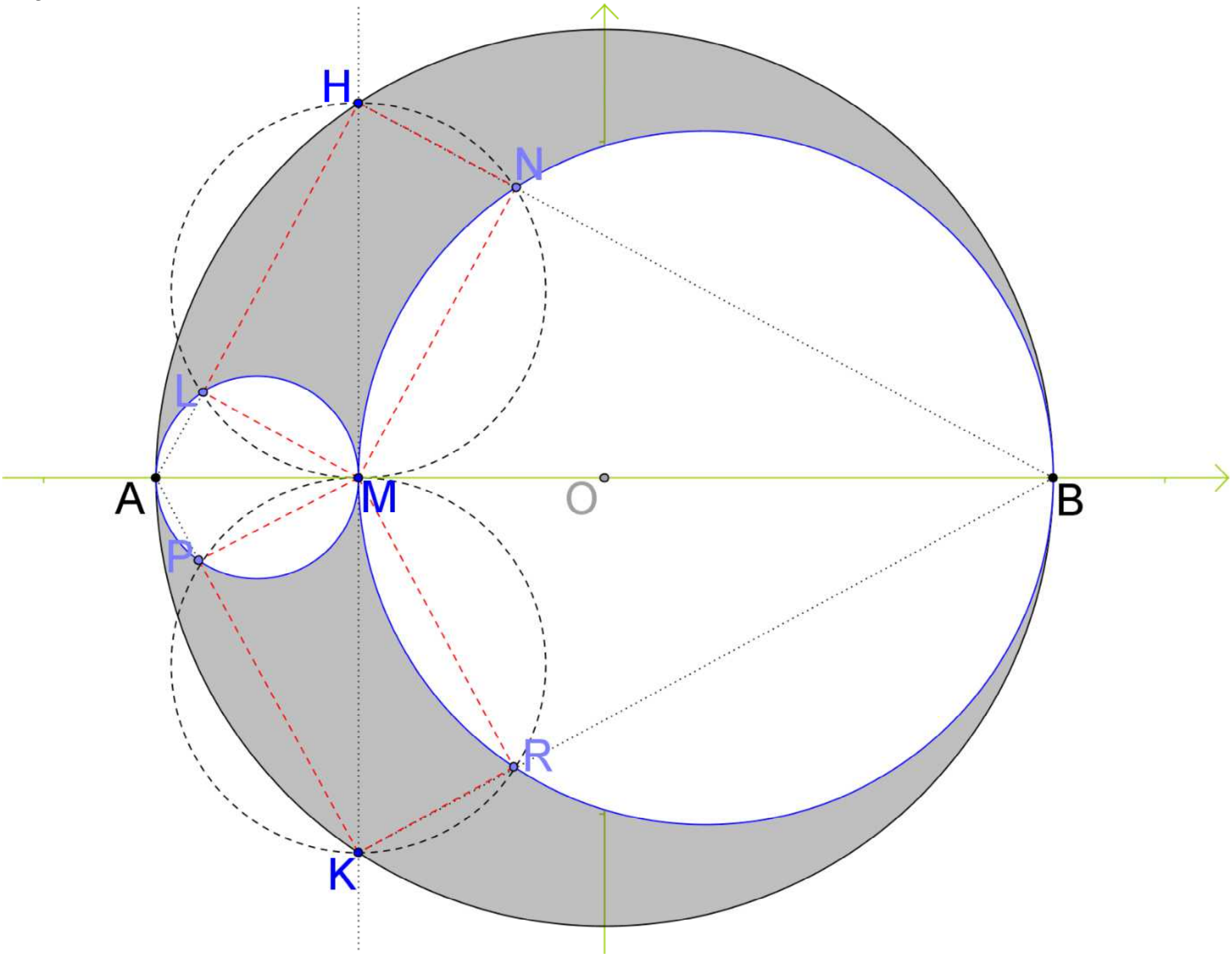
* D'autre part, l'aire au sol de l'arbel vaut

$A = \pi r^2 - \pi\left(\frac{r+x}{2}\right)^2 - \pi\left(\frac{r-x}{2}\right)^2 = \frac{\pi}{4}(4r^2 - (r+x)^2 - (r-x)^2)$ qu'il suffit de développer pour trouver le résultat.

b) L'aire au sol de l'arbel est maximale quand M est en O et cette aire maximale représente le 1/4 de l'aire du disque de diamètre [AB].

p: Il suffit de chercher le maximum de la fonction $\frac{\pi}{4}(r^2 - x^2)$ sur $[-r\ ;\ r]$.

4. Quadrilatère de l'arbel



L, N, P et R étant les points d'intersection de [AH] , [HB] et [AK] , [KB] avec les cercles intérieurs, on peut trouver deux rectangles à la base (quadrilatères de l'arbel) donnant "deux pièces rectangulaires à plafond sphérique penché".
p: Par le théorème de l'angle inscrit dans un demi-cercle, les angles en H , N et L valent ...

5. Volume de l'arbel

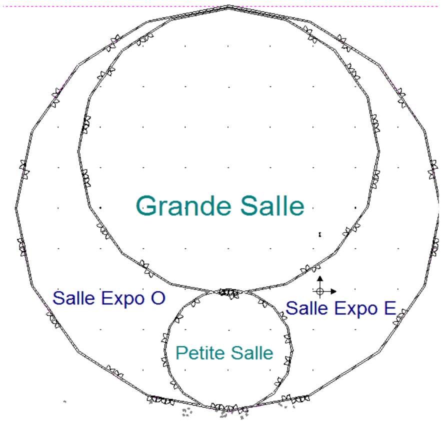
a) Si H et K sont les points d'intersection de la perpendiculaire en M à (AB) avec le cercle de diamètre [AB] dans xOy et $\mathcal{C}$ le cylindre de diamètre de base [MH] et de hauteur r (hauteur de l'arbel); alors le volume de l'arbel vaut $\boxed{V = 2 * volume(\mathcal{C}) = \frac{\pi}{2} r(r^2 - x^2)}$.

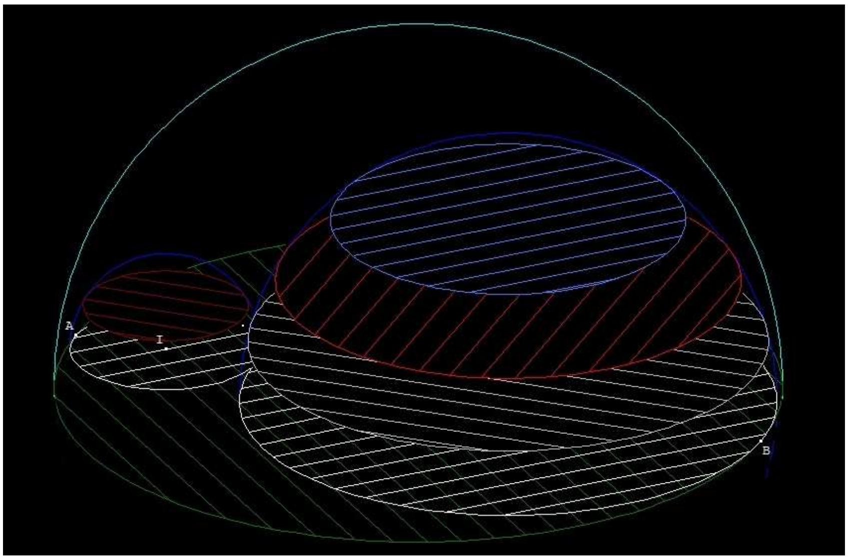
p: $V = \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r+x}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\frac{4}{3}\pi\left(\frac{r-x}{2}\right)^3 = \frac{2\pi}{3}\left(r^3 - \frac{1}{8}(r+x)^3 - \frac{1}{8}(r-x)^3\right) = \frac{2\pi}{3}\left(r^3 - \frac{1}{8}(2r^3 + 6rx^2)\right)$
donc $V = \frac{\pi}{6}(4r^3 - r^3 - 3rx^2) = \frac{\pi}{6}(3r^3 - 3rx^2) = \frac{\pi}{2}(r^3 - rx^2) = r\frac{\pi}{2}(r^2 - x^2) = rA = 2r * Aire(\Gamma)$.

b) Le volume de l'arbel est maximal quand M est en O et ce volume représente les 3/4 du volume de la demi-sphère de diamètre [AB].
p: Il suffit de chercher le maximum de la fonction $(r^2 - x^2)$ sur $[-r\ ;\ r]$, puis...

III. LE TEMPLE DE L'ARBEL

Et pourquoi pas une architecture très géométrique (pas forcément rigide...), avec des matériaux de dernière technologie, voire à venir ? Une architecture futuriste !?

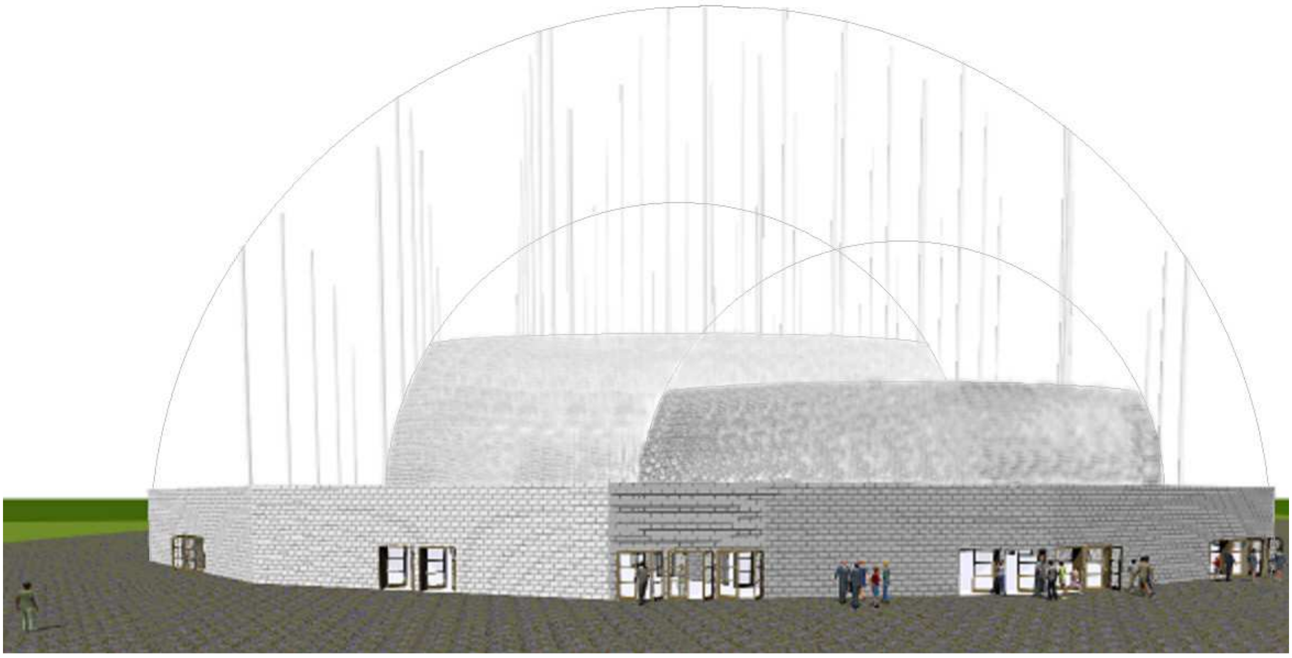




Je vois:

Une exposition Amedeo MODIGLIANI ou une rétrospective Georges MATHIEU dans les grandes ailes de l'arbel

Un concert Dimitri CHOSTAKOVITCH dans la Petite Salle, ou bien l'Atys de Jean-Baptiste LULLY dans la Grande Salle.



IK, mars 2015