FORMES FRACTALES

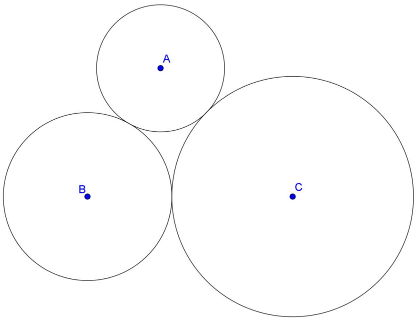
Ibrahim Keita

I.POINTS DE SODDY

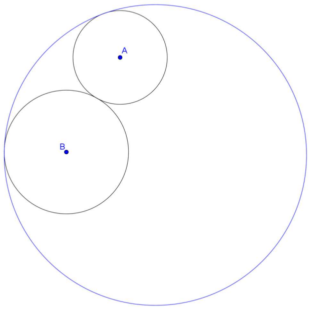
1.Définition

Trois cercles sont mutuellement tangents si chacun est tangent aux deux autres.
Deux cas sont alors possibles :

cercles extérieurs



cercles intérieurs



en écartant les cas, peu intéressants ici, de trois cercles tangents en un même point I.

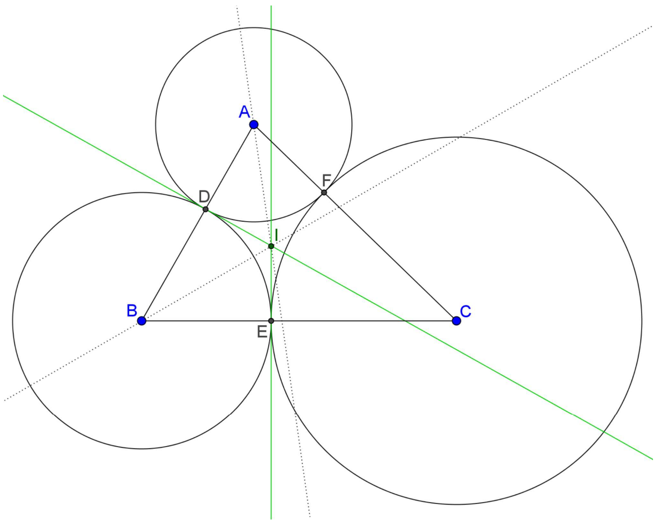
2.Existence

a) Cas de cercles extérieurs

Etant donnés trois points A, B et C distincts, il existe trois cercles C_A , C_B et C_C de centres ces points mutuellement tangents.

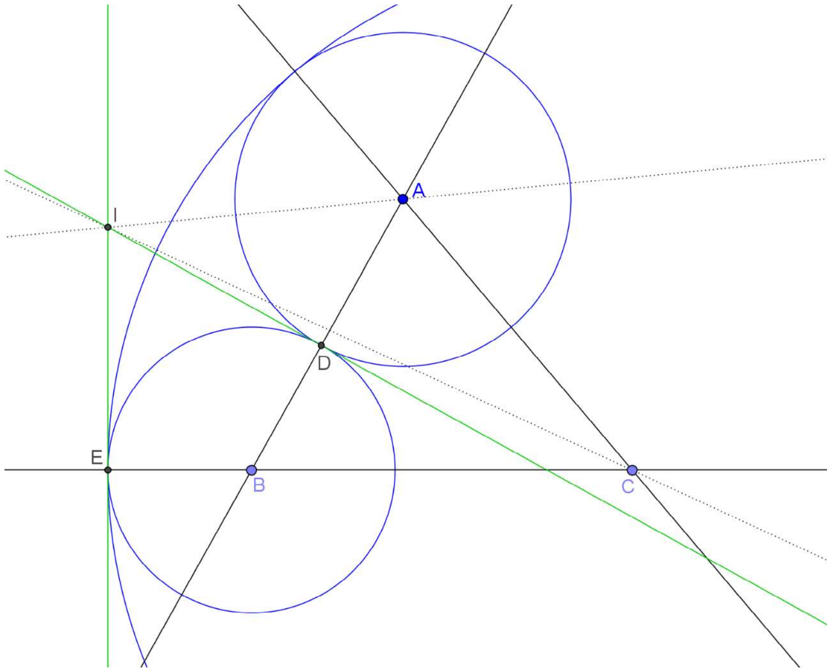
p : Si le problème a une solution, les points de contact se situent forcément en D, E et F sur [AB], [BC] et [CA] ; les tangentes communes sont les perpendiculaires en D, E et F à ces côtés.

Soit I le point d'intersection des perpendiculaires en D et en E. I a même puissance par rapport aux trois cercles. I est donc équidistant des trois côtés du triangle ABC ; c'est donc le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC.
En partant de A,B,C, il suffit donc de tracer les bissectrices en A et en B pour avoir I. De I, on trace les perpendiculaires aux côtés pour avoir D,E,F et enfin les cercles.



b) Cas des cercles intérieurs

P : Il suffit dans ce cas, de prendre pour I le centre du cercle exinscrit dans l’angle C



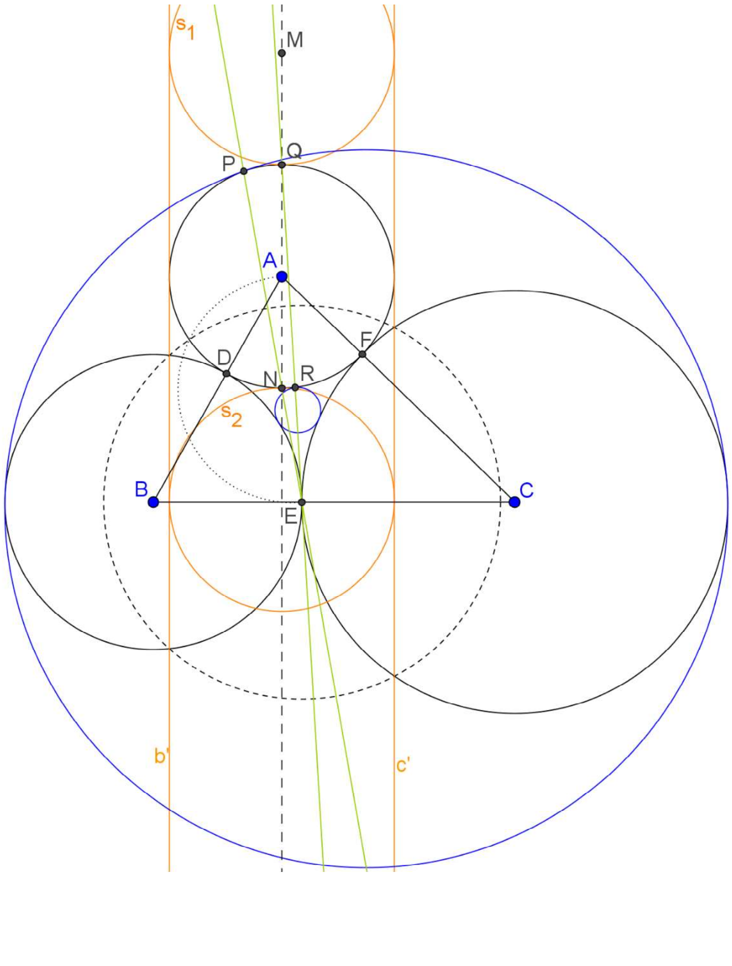
3.Cercles de Soddy

Etant donnés trois cercles mutuellement tangents, il existe généralement deux cercles qui leur sont tangents ; ce sont les cercles de Soddy de ces trois cercles.

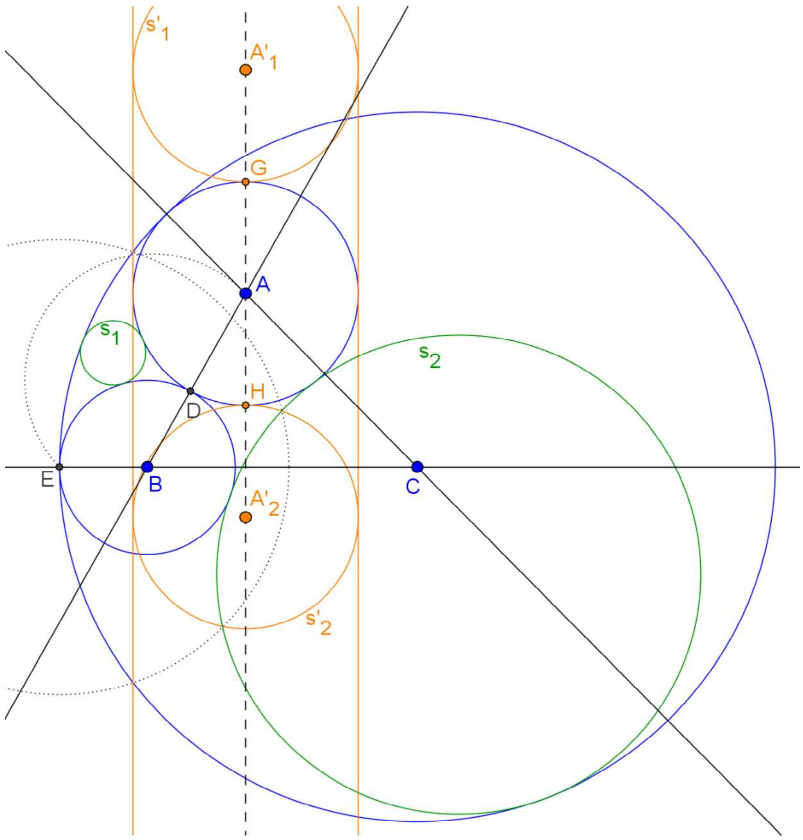
p : L’inversion de centre E qui conserve C_A, transforme C_B en b’ droite perpendiculaire à (BC) et tangente à C_A (le pôle E appartient à C_A et l’inversion conserve la tangence) et transforme C_C en c’.

La configuration devient donc le cercle C_A et les droites b’ et c’ qui admettent deux cercles, chacun tangent aux deux autres : s_1 et s_2.

Par l’inversion de centre E conservant C_A , on obtient le résultat cherché : un cercle intérieur et un cercle extérieur tangents chacun aux trois cercles de départ.



p : Pour le cas de cercles intérieurs, il suffit de faire le même raisonnement avec la configuration ci-contre.



II.FRACTALES D'APOLLONIUS

1. Introduction

Les formes fractales (fractionnées) ont été formalisées par Benoit Mandelbrot dans les années 1970 et désignent, grosso modo, des objets qui se reproduisent à l'infinie suivant une règle.

Un exemple simple de fractale est le flocon de Koch.

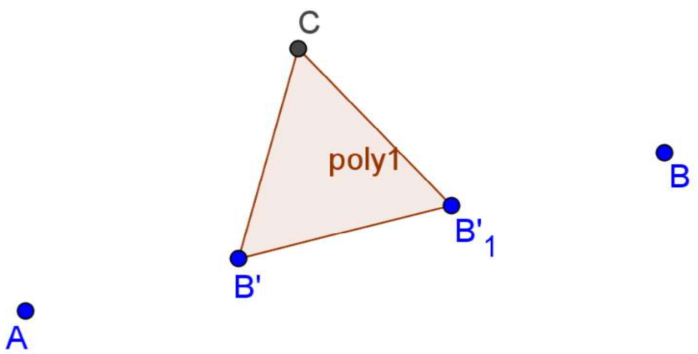
a) Outil geogebra

Etant donné un segment [AB], on veut construire un triangle équilatéral CB'B'$_1$ dont le côté vaut le tiers de AB.

*Créer A, B. Homothétie B, A, 1/3 donne B'. Homothétie B, A, 2/3 donne B'$_1$. Polygone régulier B', B'$_1$, 3 donne poly1.

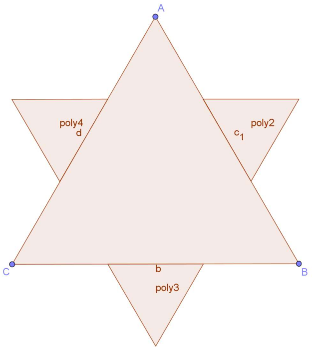
*Pour automatiser ce processus, on crée un outil geogebra *fract1* :

Outils, Créer un nouvel outil, Objets finaux poly1, Objets initiaux A puis B.

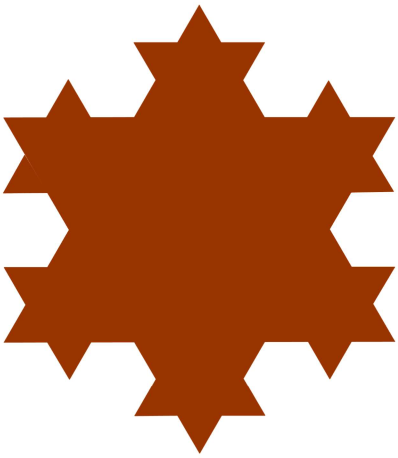


b) **Flocon de Koch** à partir d'un triangle équilatéral

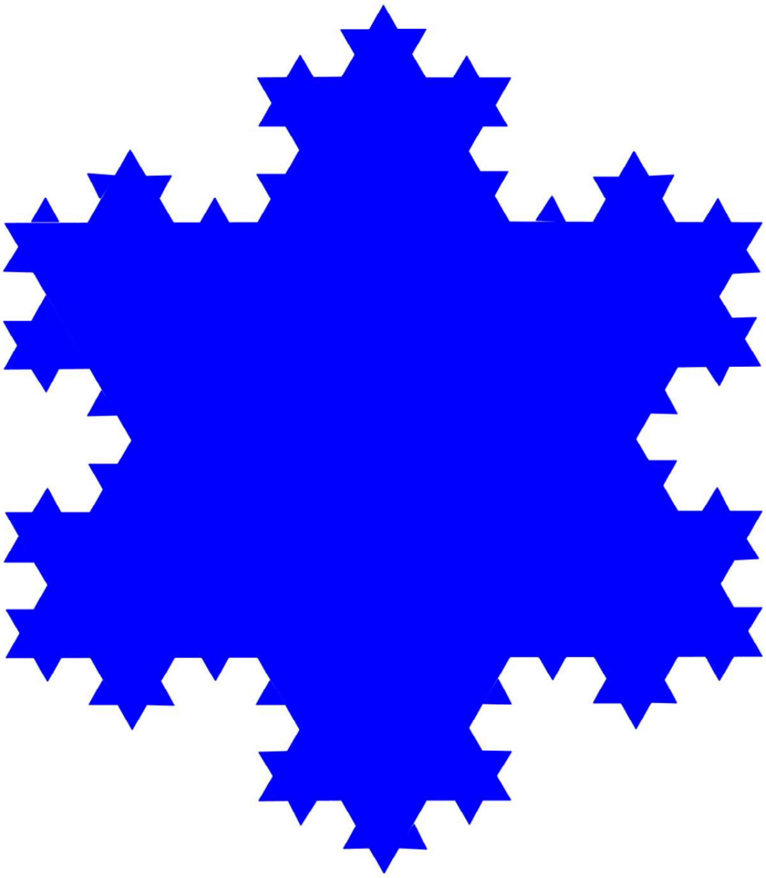
Etape 1
Fract1 A, B donne poly2
Fract1 B, c donne poly3 , …



Etape 2
En construisant les nouveaux triangles et en opacifiant à 100%.



Etape 3



2. Les cercles d'Apollonius

En utilisant les cercles de Soddy (énoncés par le mathématicien grec Apollonius), on obtient le beau tableau suivant (fractales d'Apollonius).