Fonctions ln x et exp x

Ibrahim Keita

I. PRIMITIVES

1. Définition

a) La fonction F est une primitive de la fonction f si $F'(x) = f(x)$ pour tout x sur un intervalle I donné.

b) Si F est une primitive de f, alors $F+k$ (avec k constante) est aussi une primitive de f.

2. Principales primitives

Quelques fonctions primitives usuelles sont :

f(x)	*0*	x^n $(n \neq -1)$	$\frac{1}{\sqrt{x}}$ $(x>0)$	*sin x*	*cos x*	$\frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$
F(x)	*k* (constante)	$\frac{1}{n+1} x^{n+1}$	$2\sqrt{x} + k$	*- cos x*	*sin x*	*tan x*

3. Propriétés

Si F est une primitive de f, G une primitive de g, k une constante, on a :

▪ une primitive de kf est kF,

▪ une primitive de $f+g$ est $F+G$.

II. FONCTION ln *x*

1. Définition

La fonction logarithme népérien $\ln x$ est l'unique primitive de la fonction $\frac{1}{x}$ définie quand $x > 0$ et qui s'annule pour $x = 1$.

$\ln x$ définie pour $x > 0$, $\ln 1 = 0$ et $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

2. Propriétés

a) $\ln a = \ln b$ équivaut à dire que $a = b$.

b) $\ln(ab) = \ln a + \ln b$ avec a et b positifs.

c) La fonction ln vérifie: $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$, $\ln\left(\frac{1}{b}\right) = -\ln b$, $\ln(a^n) = n\ln a$, $\ln\sqrt{a} = \frac{1}{2}\ln a$.

d) Pour toute fonction $u(x) > 0$, on a $(\ln u(x))' = \frac{u'(x)}{u(x)}$.

Exemple. $f(x) = \ln(x^2 - x + 1)$ *pour tout x ; déterminer la fonction dérivée de f.*

On obtient $f'(x) = \frac{2x-1}{x^2 - x + 1}$.

e) Pour $n > 0$, $\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0$ et $\lim_{x\to 0} x^n \ln(x) = 0$ (la puissance l'emporte sur le log).

3. Etude de la fonction ln x

a) $\lim_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$ et $\lim_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$.

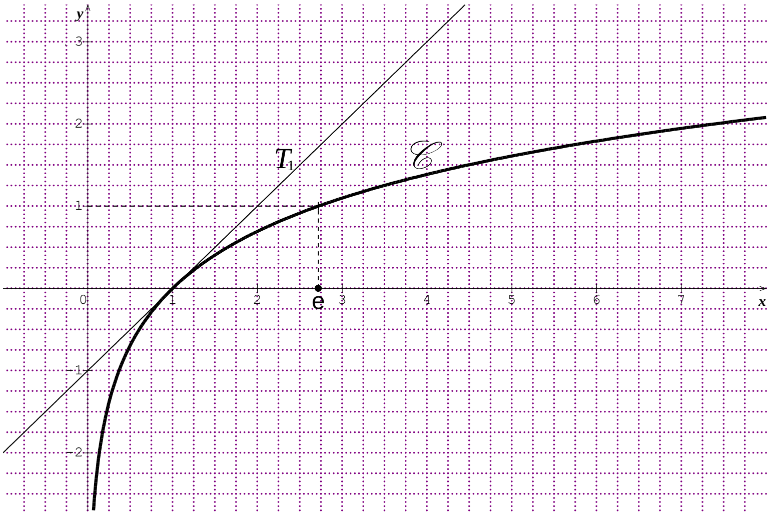
b) $(\ln x)' = \frac{1}{x} > 0$ pour $x > 0$.

D'où le tableau de variations et la courbe de la fonction ln:

x	0 $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	$-\infty$ $\nearrow$ $+\infty$

Avec: *f(1)=0* , *f(e)=1* , $e \approx 2.718$ et

f '(1)=1/1=1



III. FONCTION exp ***x***

1. Définition

a) La fonction exponentielle (de base e) exp x ou e^x est la fonction réciproque de $\ln x$ et est définie pour tout x .

$y = \ln x$ équivaut à $x = e^y$ (pour *x>0*) ; e^x est définie pour tout x et $\left(e^x\right)' = e^x$.

b) $\ln e^x = e^{\ln x} = x$ (pour *x>0*).

2. Propriétés

a) $e^{a+b} = e^a e^b$.

b) La fonction e^x vérifie: $\left(e^x\right)^n = e^{nx}$, $\dfrac{1}{e^x} = e^{-x}$, $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$, $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)e^x$ **.**

c) Pour $n > 0$, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ (l'exponentielle l'emporte sur la puissance en $+\infty$).

3. Etude de la fonction exp x

a) $\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty$ et $\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0$.

b) Pour tout x , $\left(e^x\right)' = e^x > 0$.

D'où le tableau de variations et la courbe de la fonction exp:

x	$-\infty$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $+\infty$
f'	$+$
f	0 $\nearrow$ $+\infty$

Avec: *f(1)=e* ≈ 2.718 et *f '(0)=e*^{0}*=1* .