Equations différentielles

Ibrahim Keita

Soit une équation où l'inconnue est, non pas une variable x comme dans le cas d'une équation classique, mais une fonction x de la variable t comme par exemple *(e)* $x'=2t-1$. Résoudre cette équation différentielle, c'est trouver toutes les fonctions x vérifiant l'équation *(e)*. Dans cet exemple il est aisé de voir que toute solution est de la forme $x=t^2-t+k$, où k est une constante pouvant prendre toutes les valeurs réelles.

Dans les cas où la solution est moins immédiate nous allons voir deux catégories de solutions résumées dans le Formulaire du BTS.

I. EQUATION DIFFERENTIELLE DU PREMIER ORDRE

Elle fait intervenir la fonction dérivée première x' et est de la forme

$$(E) \quad a(t)\,x'(t)+b(t)\,x(t)=c(t)$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $c(t)$ sont des réels donnés (dépendants de t ou non) avec $a(t) \neq 0$.

1. Equation homogène

$$(E_0) \quad a(t)\,x'(t)+b(t)\,x(t)=0$$

La solution générale de (E_0) **est** $x(t)=ke^{-G(t)}$

où k **est une constante réelle quelconque et** $G(t)$ **une primitive de** $\dfrac{b(t)}{a(t)}$ **.**

Exemples.

a) *Résoudre l'équation différentielle : (E_1) $x'+2x = 0$ où x est une fonction de la variable t définie sur* $\mathbb{R}$.

$b/a=2/1=2$ a pour primitive $G(t)=2t$; d'où la solution de (E_1) : $x(t)=k\,e^{-2t}$.

b) *Résoudre l'équation différentielle :*

(E_2) $(x+1)\,y'+(x-1)\,y = 0$ où y est une fonction de la variable x définie pour $x>-1$.

$\dfrac{b(x)}{a(x)}=\dfrac{x-1}{x+1}=1-2\dfrac{1}{x+1}$ a pour primitive $G(x)=x-2\ln(x+1)$.

Donc $y=ke^{-x+2\ln(x+1)}$ qu'on peut simplifier en remarquant que $e^{-x+2\ln(x+1)}=e^{-x}e^{\ln(x+1)^2}=e^{-x}(x+1)^2$;

D'où $y=k(x+1)^2e^{-x}$.

2. Equation générale

$$(E) \quad a(t)\,x'(t)+b(t)\,x(t)=c(t)$$

Si $x_0(t) = k\,e^{-G(t)}$ **est la solution générale de** (E_0) **et** $h(t)$ **une solution particulière de** (E) **, alors la solution générale de (E) est :** $x(t) = x_0(t) + h(t)$.

Exemple. *Résoudre l'équation différentielle :*

(E) (x+1) y'+(x-1) y = x^2+1 *où y est une fonction de la variable x définie sur* $\mathbb{R}$.

a) On a vu précédemment que la solution de l'équation homogène (E_0) $(x+1)\,y'+(x-1)\,y = 0$ est $y_0 = k(x+1)^2 e^{-x}$.

b) $h(x) = x$ est une solution particulière de (E) car , vu que $h'(x) = 1$, on a :

$(x+1)\,h'(x) + (x-1)\,h(x) = (x+1).1+(x-1).x = x+1+x^2-x = x^2+1$.

c) La solution générale de (E) est alors :

$$y = k(x+1)^2 e^{-x} + x \quad .$$

II. EQUATION DIFFERENTIELLE DU SECOND ORDRE

Elle fait intervenir la fonction dérivée seconde x'' et est de la forme

$$(E) \quad a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = d(t)$$

où a , b , c sont des constantes réelles données et $d(t)$ un réel (dépendant de t ou non) avec $a \neq 0$.

1. Equation homogène

$$(E_0) \quad a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = 0$$

On considère l'équation caractéristique (e) $a\,r^2 + b\,r + c = 0$. On calcule $\Delta = b^2-4ac$ et on résout (e) .

λ ***et*** μ ***étant des constantes réelles quelconques, la* solution générale de** (E_0) **est :**

- **si Δ>0 ,** $x(t) = \lambda\, e^{r_1 t} + \mu\, e^{r_2 t}$ ***où*** r_1 **,** r_2 ***sont les racines réelles de (e)***

- **si Δ=0 ,** $x(t) = (\lambda\, t + \mu)\, e^{rt}$ ***où r est l'unique racine réelle de (e)***

- **si Δ<0 ,** $x(t) = (\lambda \cos \beta t + \mu \sin \beta t)\, e^{\alpha t}$ ***où*** $\alpha \pm i\,\beta$ ***sont les racines complexes de (e) .***

Exemples.

a) Résoudre l'équation différentielle :

(E_1) $x''-2\,x'-3\,x = 0$ *où x est une fonction de la variable t définie sur* $\mathbb{R}$.

Le discriminant de l'équation caractéristique $r^2-2r-3 = 0$ est $\Delta = (-2)^2-4(1)(-3) = 16$. On obtient les deux racines réelles 3 et -1 . D'où la solution :

$$x(t) = \lambda\, e^{3t} + \mu\, e^{-t} \quad .$$

b) Résoudre l'équation différentielle :

(E_2) $9\,y''+24\,y'+16\,y = 0$ *où y est une fonction de la variable x définie sur* $\mathbb{R}$.

Le discriminant de l'équation caractéristique $9r^2+24r+16 = 0$ est $\Delta=0$. On obtient l'unique racine réelle $-4/3$. D'où la solution :

$$y(x) = (\lambda x + \mu) e^{-\frac{4}{3}x} \quad .$$

c) Résoudre l'équation différentielle :

(E_3) $y''+4y'+13y = 0$ où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

Le discriminant de l'équation caractéristique $r^2+4r+13 = 0$ est $\Delta= -36$. On obtient deux racines complexes $-2+3i$ *et* $-2-3i$. D'où la solution :

$$y(x) = (\lambda \cos 3x + \mu \sin 3x) e^{-2x} .$$

<u>2. Equation générale</u>

$$(E) \quad a\,x''(t) + b\,x'(t) + c\,x(t) = d(t)$$

Si $x_0(t)$ **est la solution générale de l'équation homogène** (E_0) **et** $h(t)$ **une solution particulière de** (E) **, alors la solution générale de (E) est :** $x(t) = x_0(t) + h(t)$.

Exemple. *Résoudre l'équation différentielle :*

(E) $9y''+24y'+16y = 16x+40$ où y est une fonction de la variable x définie sur $\mathbb{R}$.

a) On a vu précédemment que la solution de l'équation homogène (E_0) $9y''+24y'+16y = 0$ est

$$y_0(x) = (\lambda x + \mu)\, e^{-\frac{4}{3}x} \quad .$$

b) $h(x) = x+1$ est une solution particulière de (E) car , vu que $h'(x) = 1$ et $h''(x) = 0$, on a :

$9h''(x)+24h'(x)+16h(x) = 0+24.1+16.(x+1) = 24+16x+16 = 16x+40$.

c) La solution générale de (E) est alors :

$$y(x) = (\lambda x + \mu)\, e^{-\frac{4}{3}x} + x + 1 \quad .$$