Développements limités

Ibrahim Keita

Le développement limité d'une fonction *f(x)* au voisinage de zéro consiste à trouver un polynôme *P(x)* prenant des valeurs proches de *f(x)* pour les valeurs de *x* proches de zéro. Un tel polynôme *P(x)* permet alors de faire du calcul approché (approximation linéaire,…) et d'autres applications mathématiques comme l'équation de la tangente à l'origine ou la limite quand *x* tend vers 0.

I. FORMULE DE TAYLOR

1. Formule

Cette formule est donnée ici dans le seul but d'expliquer comment on obtient les premiers développements limités. Elle ne sert pas dans la pratique de la recherche de développements limités.

Si *n* est un entier positif donné et *f* est une fonction (*n+1*) fois dérivable alors , pour *x* proche de zéro, on peut écrire :

$$f(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + x^n\varepsilon(x) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0 \ .$$

Dans cette formule $n! = n.(n-1)\ldots2.1$ s'appelle « factorielle *n* » et $f^{(n)}$ représente la dérivée *n* ième de *f*.

2. Définitions et propriétés

a) Cette écriture représente le développement limité de *f(x)* à l'ordre *n* au voisinage de zéro qu'on notera ici, par économie d'écriture, DLn .

b) $P(x) = f(0) + \frac{f'(0)}{1!}x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + ... + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$ *polynôme de degré n,* s'appelle partie régulière du DLn

et $x^n\varepsilon(x)$ est le reste ou infiniment petit d'ordre *n*.

c) Le DLn est unique pour une fonction *f* donnée.

II. DEVELOPPEMENTS LIMITES CLASSIQUES

Comme pour le calcul des dérivées, il y a des DLn de base qui nous servirons à faire les DLn demandés. Ces DLn figurent aussi dans le Formulaire officiel du BTS.

1. e^t , $1/(t-1)$ et $(1+t)^k$

En appliquant la Formule de Taylor et en remarquant que toute dérivée de e^t est égale à e^t avec $e^0=1$, on trouve :

$$e^t = 1 + \frac{1}{1!}t + \frac{1}{2!}t^2 + ... + \frac{1}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{t\to 0}\varepsilon(t) = 0 \ .$$

On peut montrer aussi que :

$$\frac{1}{1-t} = 1 + t + t^2 + ... + t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$(1+t)^k = 1 + \frac{k}{1!}t + \frac{k(k-1)}{2!}t^2 + ... + \frac{k(k-1)...(k-n+1)}{n!}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

Exemples . *a) Donner le développement limité à l'ordre 3 (DL3) de* $f(x) = e^x$.

On prend la formule de e^t *avec* $t=x$ *et* $n=3$ *:*

$$e^x = 1 + \frac{1}{1!}x + \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + x^3\varepsilon(x) \quad \textit{ce qui donne} \quad e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

b) Donner le DL2 de $g(x) = \sqrt{1+x}$.

En remarquant que $\sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ *, on prend la formule* $(1+t)^k$ *avec* $t = x$ *,* $k =1/2$ *et* $n=2$ *:*

$$g(x) = (1+x)^{\frac{1}{2}} = 1 + \frac{\frac{1}{2}}{1!}x + \frac{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)}{2!}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad \textit{et en simplifiant}$$

$$g(x) = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + x^2\varepsilon(x) \ .$$

<u>2. Autres développements limités.</u>

Par intégration et dérivation on trouve :

$$\ln(1-t) = -t - \frac{1}{2}t^2 - \frac{1}{3}t^3 - ...... - \frac{1}{n}t^n + t^n\varepsilon(t)$$

$$\frac{1}{(1-t)^2} = 1 + 2t + 3t^2 + ... + (n+1)t^n + t^n\varepsilon(t)$$

<u>III. PROPRIETES DES DEVELOPPEMENTS LIMITES</u>

1. On peut additionner, multiplier, composer les DLn classiques afin d'obtenir des DLn.

2. On utilise les DLn essentiellement pour faire des approximations, avoir l'équation de la tangente au point d'abscisse 0 ainsi que la position de la courbe par rapport à la tangente quand *x* est proche de 0.

Exemples. *Soit la fonction* $f(x)=(x-1)e^{-x}$ *et* $\mathscr{C}$ *sa courbe représentative sur* $\mathbb{R}$.

<u>a) Déterminer le DL2 de f.</u>

En prenant $t=-x$ *et* $n=2$ *dans le DLn de* e^t *, on obtient le DL2 de* e^{-x} *:*

$e^{-x} = 1 + (-x) + \frac{1}{2}(-x)^2 + x^2\varepsilon(x) = 1 - x + \frac{1}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x)$ *, puis*

$f(x) = (-1+x)(1 - x + \frac{1}{2}x^2) + x^2\varepsilon(x) = -1 + x - \frac{1}{2}x^2 + x - x^2 + x^2\varepsilon(x)$ *en développant et en prenant seulement les termes de degré inférieur ou égal à deux.*

Après simplification, on obtient le DL2 de f(x) :

$$f(x) = -1 + 2x - \frac{3}{2}x^2 + x^2\varepsilon(x) \quad .$$

b) Calculer une valeur approchée de f(0,10) à 10^{-2} près

Avec une calculatrice simple (ne disposant pas de la fonction exponentielle), on utilise la partie régulière du :

DL1 ($-1+2x$) *qui donne f(0,10) = -1+2(0,10) ≈ -0,80* *(on dit aussi approximation linéaire)*

ou du DL2 ($-1+2x-\frac{3}{2}x^2$) *qui donne* $f(0,10) = -1+2(0,10)-3/2(0,10)^2 \approx -0,81$

valeurs à comparer à celle obtenue directement avec une calculatrice scientifique (disposant de la fonction exponentielle) :

$f(0,10) = (0,10-1)e^{-0,10} \approx -0,81$.

c) Déterminer l'équation de la tangente T_0 à la courbe 𝒞 de f au point d'abscisse 0 .

▪ *Il suffit de prendre le polynôme de degré inférieur ou égal à 1dans la partie régulière du DLn (n>1) de f(x) et on a l'équation cherchée :*

(T_0) $y = 2x-1$.

▪ *Le DLn permet aussi de déterminer la position de la courbe 𝒞 par rapport à la tangente T_0 . Pour cela on étudie le signe du premier terme non nul de degré supérieur à 1 dans le DLn. Ici, il s'agit de $-3/2x^2$. Comme x^2 est toujours positif ou nul et $-3/2 < 0$ le signe de $-3/2x^2$ est négatif. On en déduit, qu'au voisinage de 0, la courbe 𝒞 est en dessous de sa tangente T_0 .*

d) A faire . *Etudier et tracer la courbe 𝒞 et la tangente T_0 (pour $f(x)=(x-1)e^{-x}$)et constater les résultats précédents.*