Dérivation

Ibrahim Keita

I. DERIVEES USUELLES

Les fonctions dérivées usuelles sont :

f(x)	*k* (constante)	*x*	x^n (*n* constante)	*1/x* ($x\neq 0$)	$\sqrt{x}$ ($x>0$)	*sin x*	*cos x*
f'(x)	*0*	*1*	nx^{n-1}	$-\dfrac{1}{x^2}$	$\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$	*cos x*	*- sin x*

II. DERIVEE EN UN POINT

Si *f'(x)* est la fonction dérivée de *f(x)*, alors le nombre dérivée de *f* en *a* est *f'(a)* valeur de *f'(x)* quand *x=a*.

Exemple. $f(x)=\sqrt{x}$ *; déterminer le nombre dérivé de f en 4.*

On a $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ *. En remplaçant x par 4 on obtient :* $f'(4)=\dfrac{1}{2\sqrt{4}}=\dfrac{1}{2*2}=\dfrac{1}{4}$.

III. OPERATIONS SUR LES DERIVEES

On rappelle les opérations d'addition et de multiplication de deux fonctions *u(x)* et *v(x)* (de la variable *x*) entre elles ou avec une constante *k* donnée :

$$(u(x)+v(x))'=u'(x)+v'(x) \qquad (u(x).v(x))'=u'(x).v(x)+u(x).v'(x) \qquad (k.u(x))'=k.u'(x)$$

$$\left(\frac{1}{v(x)}\right)'=-\frac{v'(x)}{(v(x))^2} \qquad \left(\frac{u(x)}{v(x)}\right)'=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{(v(x))^2} \qquad (u(ax+b))'=a.u'(ax+b)$$

Exemples. *Pour les deux dernières formules*

Si $f(x)=\dfrac{2x+1}{-x+3}$ *, on a :* $f'(x)=\dfrac{(2)(-x+3)-(2x+1)(-1)}{(-x+3)^2}=\dfrac{-2x+6+2x+1}{(-x+3)^2}=\dfrac{7}{(-x+3)^2}$.

Si $g(x)=\sin(2x-5)$ *, on a :* $g'(x)=2\cos(2x-5)$.

IV. TANGENTE ET DERIVEE

1. Le nombre dérivé en *a*, *f'(a)*, est la pente de la tangente à la courbe $\mathscr{C}$ de *f* au point d'abscisse *a* .

2. L'équation de la tangente T_a au point d'abscisse *a* (point A(*a* ; *f(a)*)) , est :

$$(T_a) \quad y=f'(a).(x-a)+f(a)$$

Exemple. $f(x) = x^2$.

a) Déterminer l'équation de la tangente T_{-1} au point d'abscisse -1 .

f'(x)=2x ; donc *f'(-1)=2.(-1)=-2* et *f(-1)=(-1)²=1*

(T_{-1}) *y = -2.(x-(-1))+1 = -2(x+1)+1 = -2x-2+1 ; c'est-à-dire* (T_{-1}) *a pour équation y = -2x-1.*

b) Déterminer l'équation de la tangente T_2 au point d'abscisse 2 .

On trouve : (T_2) *y = 4x-4 . (A faire)*

V. ETUDE DE FONCTION

1.Théorème *f* étant une fonction dérivable et *f'* sa dérivée

f est croissante sur un intervalle si *f'(x)* ≥ 0 sur cet intervalle

f est décroissante sur un intervalle si *f'(x)* ≤ 0 sur cet intervalle.

2. Application Pour étudier une fonction, on calcule sa dérivée puis le signe de cette dérivée. On peut alors dresser le tableau de variations puis calculer quelques valeurs afin de tracer la courbe.

Exemple. *Etudier et représenter la fonction* $f(x) = x^3 + 3x^2 - 2$ sur $\mathbb{R}$.

a) Dérivée. $f'(x) = 3x^2 + 3.2x - 0 = 3x^2 + 6x$

b) Signe de la dérivée. La dérivée est une expression du second degré ; donc est du signe de a (=3 ici) à l'extérieur des racines. $f'(x) = 0$ *si* $3x^2 + 6x = 0$, *donc* $3x(x+2) = 0$, *d'où* $x = 0$ *ou* $x = -2$.

Donc : $f'(x) \geq 0$ *pour x extérieur à [-2 ; 0].*

c) Tableau de variations.

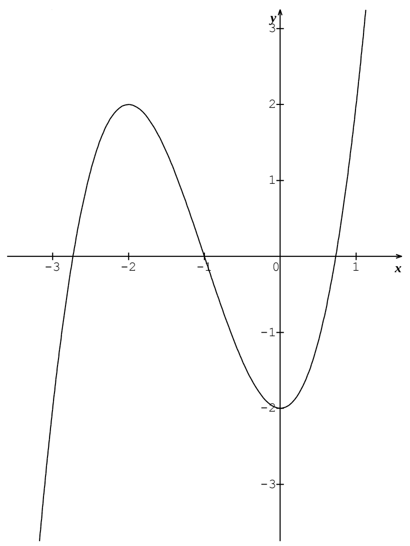
x	-∞		*-2*		*0*		+∞
f'		+	*0*	-	*0*	+	
f	-∞	↗	*2*	↘	*-2*	↗	+∞

f(-2)=-8+12-2=2 et f(0)=-2

D'autre part, on peut noter que :

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \lim_{x \to +\infty} x^3 = +\infty \text{ et } \lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$$

d) Courbe de f .



e) Tableau de valeurs. *Un tableau de valeurs obtenu en entrant la fonction f sur la calculatrice (Y=f(x) et TABLE) permet de préciser la courbe*

x	-3	-2	-1	0	1
$f(x)$	-2	2	0	-2	2

VI. FONCTION COMPOSEE

1.Théorème Si $u(v(x))$ est une fonction composée de u et de v dérivables, la dérivée est

$(u(v(x)))' = v'(x) \, . \, u'(v(x))$.

2. Application

a) Calculer la dérivée de la fonction $f(x)=\sin(-x^2+5x+4)$.

$f(x)$ peut être considérée comme la composée de $u(x)=\sin x$ et $v(x)= -x^2+5x+4$. Donc $v'(x)=-2x+5$; d'où : $f'(x)=(-2x+5)\cos(-x^2+5x+4)$ en remarquant que dérivée de sin est cos .

b) Calculer la dérivée de la fonction $g(x) = \sqrt{x^2+3}$. *(A faire)*