Courbes paramétriques

Ibrahim Keita

I. DEFINITIONS

1. Fonction réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$

Une fonction réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ associe à tout réel t le couple $(x(t), y(t))$. On note $f(t) = (x(t), y(t))$.

2. Courbe paramétrique

Une courbe paramétrique Γ est la représentation graphique d'une fonction réelle à valeurs dans $\mathbb{R}^2$.

▪ En cinématique, Γ est l'ensemble des points $M_t\,(x(t), y(t))$, c'est-à-dire la trajectoire décrite par un mobile se trouvant au point M_t à l'instant t.

▪ En notation complexe, Γ est l'ensemble des points $M_t\,(x(t), y(t))$ ou bien $M[z(t)]$ avec $z(t) = x(t)+i\,y(t)$.

▪ Si Γ est définie comme l'ensemble des points $M_t[r(t)e^{i\,\varphi(t)}]$ on se ramène à une courbe paramétrique en remarquant que

$e^{i\,\varphi(t)} = \cos\varphi(t) + i\sin\varphi(t)$ donc $M_t\,(x(t), y(t))$ avec $x(t) = r(t)\cos\varphi(t)$ et $y(t) = r(t)\sin\varphi(t)$.

Exemple. Soit la courbe Γ d'équation paramétrique $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = 2\sin t \end{cases}$, $t \in [0\ ;\ 2\pi]$.

En remarquant que pour tout point $M_t(x(t), y(t))$ de Γ on a $x^2 + y^2 = 2^2\,(\cos^2 t + \sin^2 t) = 2^2$, on en déduit que Γ est le cercle de centre O et de rayon *2* (dont tous les points sont atteints quand *t* varie entre *o* et 2π).

Quand le tracer de la courbe paramétrique est moins évident que dans l'exemple précédent, on procède à l'étude de la fonction *f* à deux variables d'une façon similaire à ce qui se passe pour les fonctions d'une variable.

II. ETUDE D'UNE COURBE PARAMETRIQUE

Pour apprendre la méthode d'étude d'une courbe paramétrique étudions par exemple la courbe Γ d'équation paramétrique $\begin{cases} x(t) = 2\cos t \\ y(t) = \sin 2t \end{cases}$, $t \in [-\pi\ ;\ \pi]$.

1. Symétries

$x(-t) = x(t)$ et $y(-t) = -y(t)$ entraînent que pour tout *t*, les points M_{-t} et M_t de Γ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses.

On pourra donc restreindre l'étude à l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$ et compléter la courbe par symétrie par rapport à (*Ox*).

2. Dérivées et signes.

Les dérivées de $x(t)$ et $y(t)$ sont $\begin{cases} x'(t) = -2\sin t \\ y'(t) = 2\cos 2t \end{cases}$ et $\begin{cases} x'(t) = 0 \;\; si \;\; t = k\pi \\ y'(t) = 0 \;\; si \;\; 2t = \pi/2 + k\pi, \text{ donc } \; t = \pi/4 + k\pi/2 \end{cases}$.

En s'aidant du cercle trigonométrique on peut déterminer les signes de $x'(t)$ (qui s'annule en 0 et en π) et de $y'(t)$ (qui s'annule en $\pi/4$ et $3\pi/4$).

On peut alors déterminer le tableau des variations conjointes de $x(t)$ et $y(t)$.

2. Tableau des variations.

▪ sin*t* est positif sur *[0 ; π]*, donc *x'(t)* ≤ *0* .

▪ Pour *t*∈ *[0 ; π/4]*, on aura *2t*∈ *[0 ; π/2]*, cos2t ≥ 0

donc *y'(t)*≥*0*.

▪ Pour *t*∈ *[π/4 ; 3π/4]*, on aura *2t* ∈ *[π/2 ; 3π/2]*,

cos2t ≤ 0 donc *y'(t)*≤ *0*.

▪ Pour *t* ∈ *[3π/4 ; π]*, on aura *2t* ∈ *[3π/2 ; 2π]*,

cos2t ≥ 0 donc *y'(t)*≥ *0*.

t	*0*		*π/4*		*π/2*		*3π/4*		*π*
x'	*0*	-	-	-	-	-	-	-	*0*
x	*2*	↘	√2	↘	*0*	↘	-√2	↘	*-2*
y	*0*	↗	*1*	↘	*0*	↘	*-1*	↗	*0*
y'	*2*	+	*0*	-	-	-	*0*	+	*2*

Les valeurs marquées dans le tableau s'obtiennent en calculant *x(t)* et *y(t)* pour les valeurs remarquables de *t* que sont : 0 ; π/4 ; π/2 ; 3π/4 ou π.

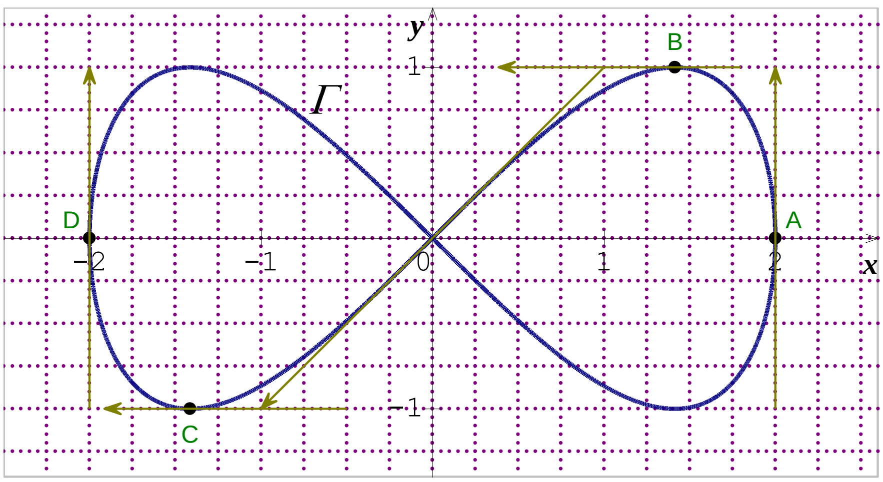
Par exemple *x(π/4)=2cos(π/4)* = √*2* et *y(π/4)=sin(2π/4)=sin(π/2)=1*.

3. Courbe *Γ*

▪ On place les points A , B , C , D de coordonnées *x(t)* et *y(t)* pour les valeurs de *t* valant 0 ; π/4 ; 3π/4 et π.

▪ On précise la courbe en construisant les vecteurs tangents $\overrightarrow{T_t}$ de coordonnées *x'(t)* et *y'(t)* à *Γ* (c'est le vecteur vitesse en cinématique) ; ainsi :

$\overrightarrow{T_0}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{T_{\pi/4}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{T_{\pi/2}}\begin{pmatrix}-2\\-2\end{pmatrix}$, $\overrightarrow{T_{3\pi/4}}\begin{pmatrix}-\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{T_{\pi}}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$ sont les vecteurs tangents à la courbe *Γ* aux points A , B , O , C et D.



▪ En tenant compte des variations de *x(t)* et *y(t)* on obtient l'arc de courbe ABOCD.

▪ On complète la courbe en traçant le symétrique de l'arc ABOCD par rapport à l'axe des *x* .

La courbe obtenue est la lemniscate de Gerono (en hommage à Camille-Christophe Gerono, 1799-1891).